

The background of the slide features a 3D finite element analysis (FEA) simulation of a mechanical component, likely a bracket or a part of a machine. The simulation is rendered in a blue color scheme with a mesh of small elements. A central circular opening in the part shows a stress distribution, with a color gradient from green (low stress) to yellow and red (high stress). The overall image has a blue gradient background.

Modelovanje i simulacija procesa deformisanja

Nastavnik:

Doc. dr Mladomir Milutinović

Asistent:

Dr Dejan Movrin



MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

Matematičko modelovanje procesa deformisanja je postupak matematičkog opisivanja procesa deformisanja. Sa jedne strane, ovaj opis mora biti relativno jednostavan, a sa druge strane i dovoljno tačan, da bi odgovorio svojoj nameni koja je definisana od strane kreatora modela.

Matematički model se obično sastoji od skupa jednačina kojima treba da su opisane sve važnije pojave ili procesi značajni za postavljeni problem. Karakteristike sredine ili objekata izražene su kroz koeficijente jednačina.

Za nalaženje rešenja formulisanog modela matematičkim metodama koriste se kako ***determinističke (analitičke i numeričke)*** tako i ***heurističke metode i veštačka inteligencija***.

Klasična (analitička) matematika - osnovni cilj utvrditi pod kojim uslovima postoji rešenje nekog zadatka i koje su osobine tog rešenja.

Numeričke matematika - efektivno nalaženje rešenja sa zadatom tačnošću. Ta tačnost treba da bude nešto veća od tačnosti koju obezbeđuje matematički model, ali ne ni suviše visoka, jer se tačnost približnog rešenja i tako neće povećati s obzirom na usvojeni model.

Heurističke metode i metode „veštačke inteligencije“ - se koriste kako bi se ubrzao proces pronalaženja dovoljno dobrog rešenja, u situacijama kada je kompletno pretraživanje nepraktično. Tehnike rešavanja problema, učenja i otkrivanja koji su bazirani na iskustvu.



MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

Teorijski okvir

1. Mehanika kontinuuma

- a) zakon konverzije mase
- b) balans količine kretanja
- c) balans momenta količine kretanja
- d) prvi zakon termodinamike ili zakon održanja energije
- e) drugi zakon termodinamike ili princip entropije

2. Konstitutivne jednačine - uzimaju u obzir strukturu (konstituciju) materijala i karakterišu njegove reakcije na spoljne efekte (granični ili kontakti uslovi, početni uslovi, dopunske jednačine).

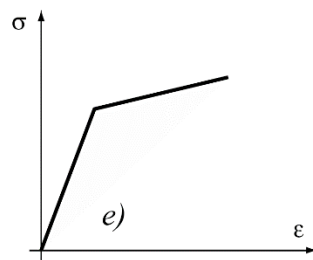
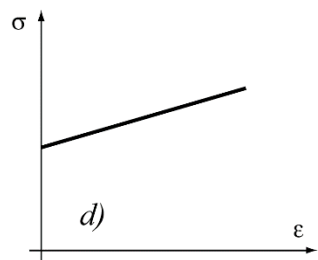
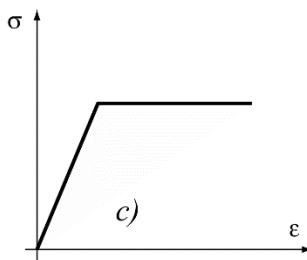
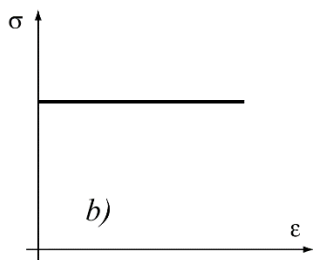
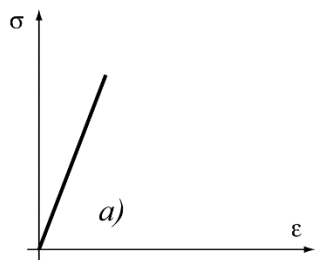
3. Hipoteze

- a) Hipoteza o kontinuitetu tela
- b) Hipoteza o homogenosti elasto-plastičnog tela
- c) Hipoteza o izotropnosti
- d) Hipoteza o nestišljivosti



MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

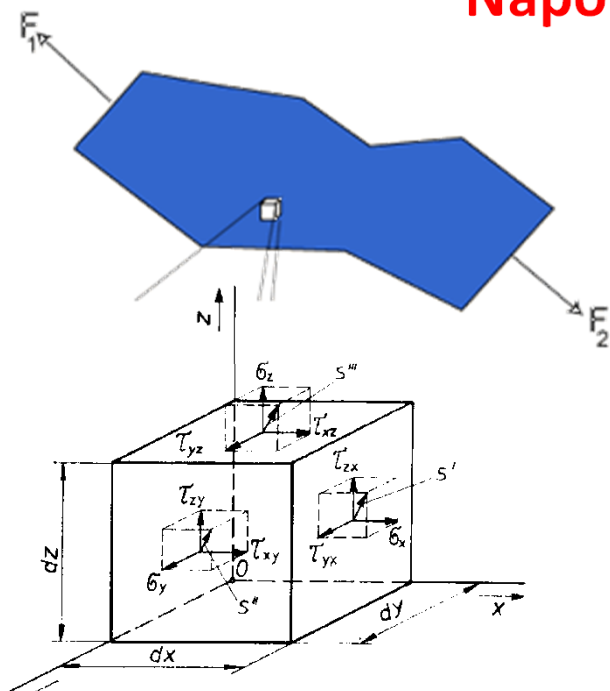
Osnovni reološki modeli



- a) idealno elastičan materijal,
- b) idealno plastičan materijal
- c) idealno elastično-plastičan materijal
- d) materijal s linearnim ojačavanjem
- e) elastično-plastično telo s linearnim ojačavanjem



Naponi i deformacije

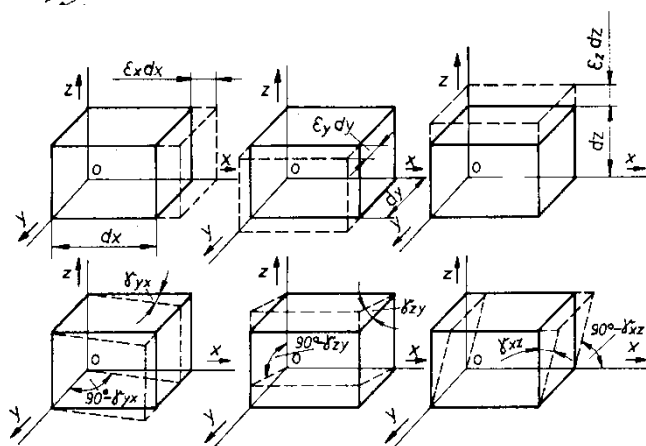


$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$D_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{sr} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{sr} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{sr} \end{bmatrix}$$

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^s + D_{\sigma} = \sigma_{sr} \cdot T_1 + D_{\sigma}$$

$$\sigma_{sr} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$



$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = D_{\varepsilon}$$

$$T_{\varepsilon} = T_{\varepsilon}^s + D_{\varepsilon} = \varepsilon_{sr} T_1 + D_{\varepsilon}$$

$$\varepsilon_{sr} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = 0$$



Veza napon - deformacija

- Područje elastičnih deformacija

$$\sigma = c_2 \cdot \varepsilon = E \cdot \varepsilon$$

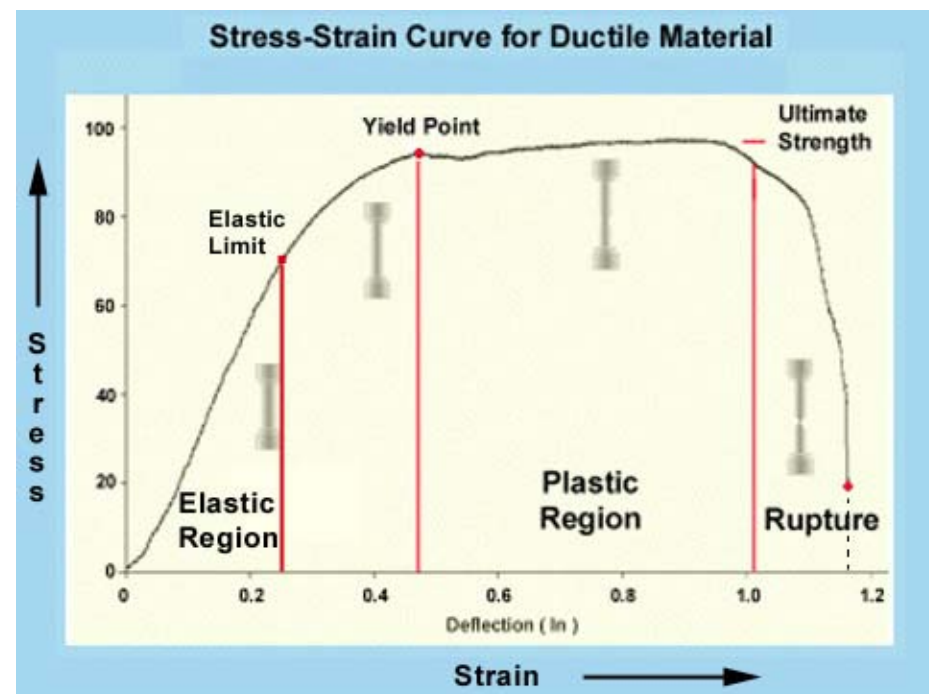
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

- Područje malih elasto-plastičnih deformacija

$$D_\varepsilon = \psi \cdot D_\sigma \quad \psi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_e}{\sigma_e}$$

- Područje velikih plastičnih deformacija

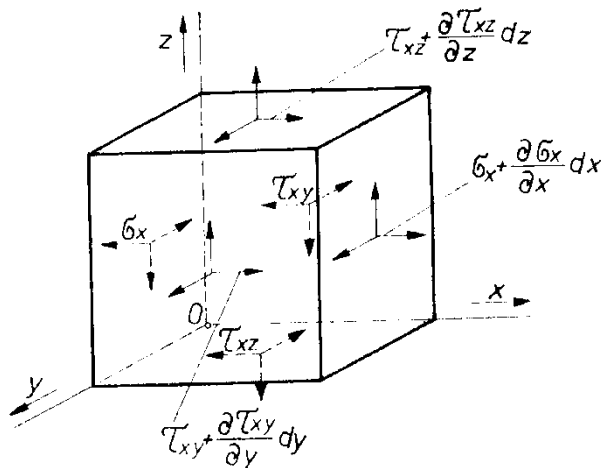
$$D_{d\varepsilon} = d\lambda \cdot D_\sigma \quad d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_e}{\sigma_e}$$





OPŠTI PROBLEM TEORIJE PLASTIČNOSTI

Jednačine ravnoteže napregnutog tela



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

Uslov neprekidnosti deformacija

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$



Fizičke jednačine stanja (napon-deformacija)

$$d\varepsilon_x = \frac{d\varepsilon_e}{\sigma_e} \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$d\gamma_{xy} = 3 \frac{d\varepsilon_e}{\sigma_e} \cdot \tau_{xy}$$

$$d\varepsilon_y = \frac{d\varepsilon_e}{\sigma_e} \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right]$$

$$d\gamma_{yz} = 3 \frac{d\varepsilon_e}{\sigma_e} \cdot \tau_{yz}$$

$$d\varepsilon_z = \frac{d\varepsilon_e}{\sigma_e} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

$$d\gamma_{zx} = 3 \frac{d\varepsilon_e}{\sigma_e} \cdot \tau_{zx}$$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]}$$

Efektivni napon

$$\varepsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]}$$

Efektivna deformacija



MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

Analitičke metode

- Metoda ravnih preseka (inženjerska metoda)
- Metoda linija klizanja
- Metoda vizioplastičnosti (teorija+exp.)
- Metoda gornje granice
- Varijaciona metoda
- Metoda deformacionog rada

Numeričke metode

- UBET
- MUBET
- MKE
- MKZ
- MKR
- Metoda reziduuma

Heurističke metode i metode veštačke inteligencije

- Ekspertni sistemi
- Soft computing
- Monte Carlo
- Genetski algoritam
- Evoluciono programiranje
- Neuronske mreže
- Fuzzy logic
- Simulirano kaljenje
- Tabu algoritam i dr.



MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

Analitičke metode

Analitičke metode baziraju se na osnovnim postulatima teorije plastičnosti i do rešenja se dolazi preko niza uprošćenja i pretpostavki, koji opisuju samu fiziku procesa na pojednostavljeni način, zbog čega se može govoriti samo o tačnosti približnih rešenja. To u neku ruku umanjuje važnost rešenja, ali se ona mogu veoma uspešno koristiti u inženjerskoj praksi.

Ove metode najviše se koriste za analizu stacionarnih procesa deformisanja

- kontakti pritisci
- deformacionu silu i deformacioni rad
- tečenje materijala
- naponsko-deformaciono stanje u obratku
- definisanje kriterijuma nastanka mikro-pukotina i njihovog razvoja itd.



METODA RAVNIH PRESEKA (PRIBLIŽNA, INŽENJERSKA METODA)

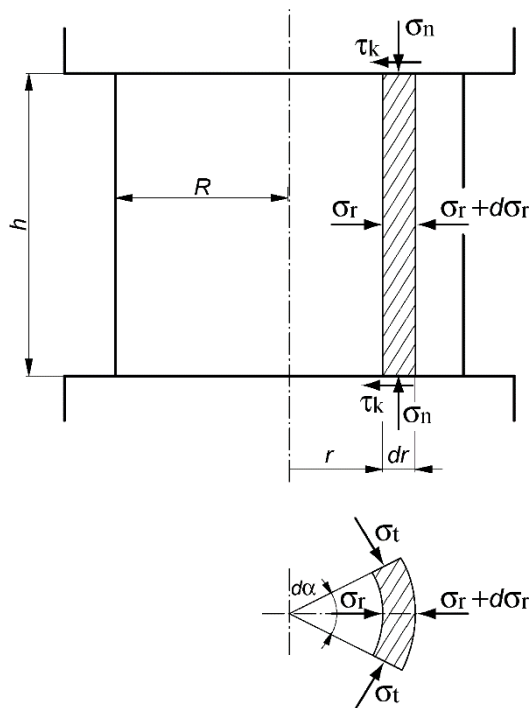
Osnovni pripncipi (pretpostavke) na kojima se bazira metoda ravnih preseka:

1. Stvarno prostorno naponsko-deformaciono stanje svodi se na ravansko ili osno-simetrično (izuzetak: sabijanje ili valjanje ploče, kovanje i istiskivanje složenih-nesimetričnih delova).
2. Raspored normalnih i tangencijalnih napona određuje se samo za kontaktnu površinu, a ne i za unutrašnjost tela. Pri tome se podrazumeva da su na slobodnoj površini naponi jednaki nuli.
3. Deformisanje se smatra homogenim (zanemaruje se neravnomernost rasporeda napona u dve ravni, pa oni postaju funkcija samo jedne - treće koordinate), zbog čega se mogu koristiti samo glavni naponi i deformacije. (Ovo je utoliko bliže realnosti ukoliko je veći odnos kontaktne prema slobodnoj površini).
4. Zavisnost smičućih napona od odgovarajuće koordinate je linearna
5. Kao uslov plastičnog tečenja obično se koristi uslov maksimalnih tangencijalnih napona, kao matematički najjednostavniji. Pri tome se naponi u ravnima upravnim na ose koordinatnog sistema smatraju glavnim, tj. zanemaruje se eventualno postojanje smičućih napona u tim ravnima ili se oni eliminišu iz izraza pogodnim transformacijama.
6. Preseci obratka normalni na osu simetrije ostaju ravni u toku celog procesa deformisanja.



Pretpostavke i uprošćenja:

1. Smatra se da valjak tokom obrade zadržava prvobitni cilindrični oblik.
2. Tangencijalni kontaktni napon proporcionalan je normalnom kontaktnom naponu (σ_n) i koeficijentu trenja (μ): $\tau_k = \mu \sigma_n$
3. Radijalni napon (σ_r) ne menja se po visini obratka



$$\sigma_r \cdot r \cdot d\alpha \cdot h - (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\alpha \cdot h - 2\tau_k r \cdot d\alpha \cdot dr + 2\sigma_t dr \cdot h \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} = 0$$

$$\tau_k = \mu \cdot \sigma_n$$



$$\sigma_r \cdot dr \cdot h + d\sigma_r \cdot r \cdot h + 2\mu \cdot \sigma_n \cdot r \cdot dr - \sigma_t \cdot dr \cdot h = 0$$

$$\varphi_r = \varphi_t \Leftrightarrow \sigma_r = \sigma_t$$



$$d\sigma_r \cdot r \cdot h + 2\mu \cdot \sigma_n \cdot r \cdot dr = 0$$

$$\sigma_n - \sigma_r = K \Rightarrow d\sigma_n = d\sigma_r$$



$$\frac{d\sigma_n}{\sigma_n} = -2\mu \frac{dr}{h} \Rightarrow \ln \sigma_n = -\frac{2\mu}{h} r + C_1$$

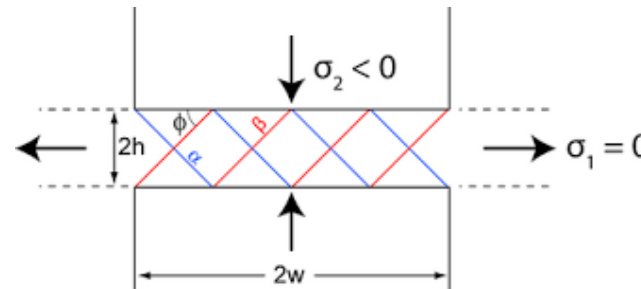
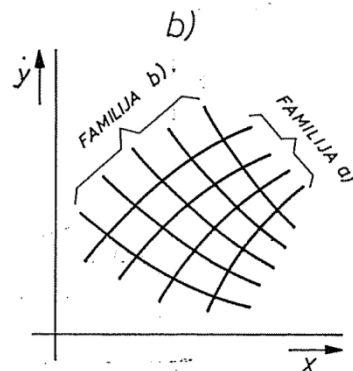
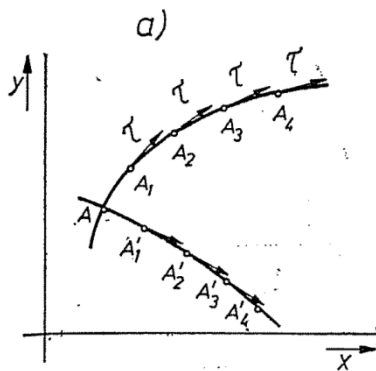
$$\text{za } r = R \rightarrow \sigma_r = 0, \text{ tj. } \sigma_n = K \Rightarrow C_1 = \ln K + \frac{2\mu}{h} R$$



$$\sigma_n = K e^{\frac{2\mu}{h}(R-r)}$$

METODA LINIJA KLIZANJA

Pod linijama klizanja, u matematičkom smislu, podrazumevaju se **trajektorije maksimalnih smičućih napona**. U svakoj tački tela na koje deluje spoljne opterećenje postoje dva međusobno ortogonalna pravca (α , β) duž kojih smičući naponi imaju maksimalnu vrednost.

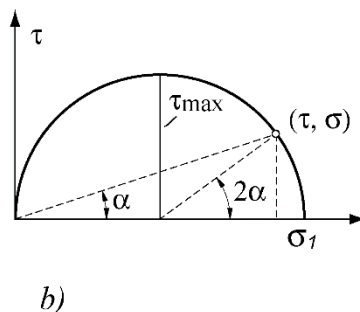
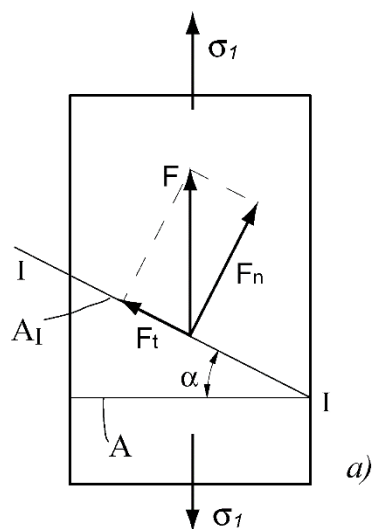


- Primenjuju se za slučaj ravanskog i osno-simetričnog naponskog stanja
- Ne uzima u obzir deformaciono ojačavanje materijala (idealno plastični materijal)
- Analitičko rešenje je moguće dobiti samo za jednostavnije slučajeve (numerička integracija i druge približne metode)



Hipoteza maksimalnog tangencijalnog napona (Tresca-in uslov plastičnog tečenja)

• *Jednoosno naponsko stanje*



$$\tau = \frac{F_t}{A_I} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{F}{A} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \tau = \tau_{\max}$$

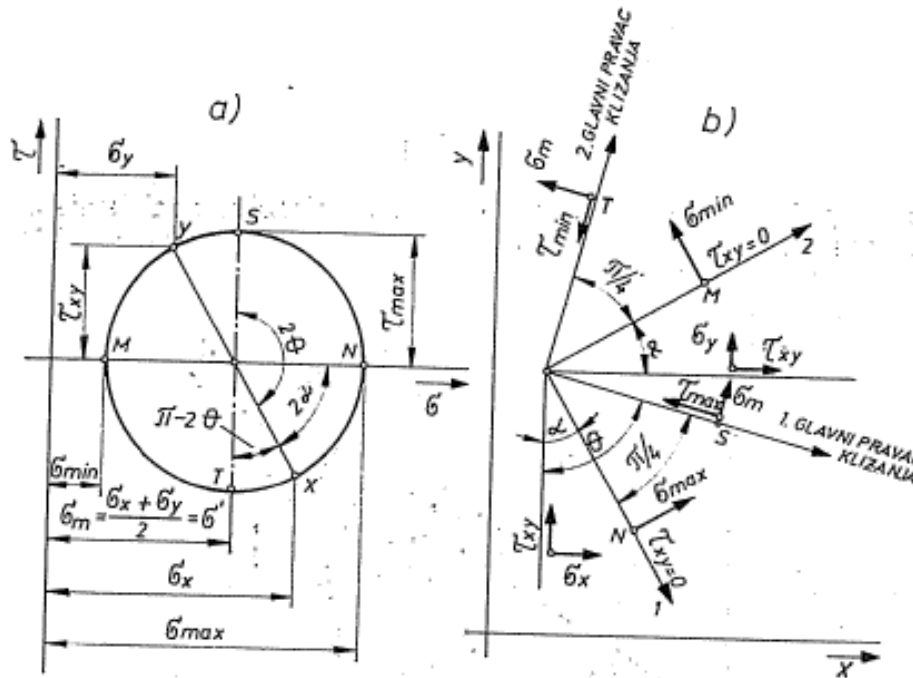
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

$$\sigma_1 = K$$

$$\tau_{\max} = \frac{K}{2}$$



METODA LINIJA KLIZANJA



$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2 \quad k \approx 0.58K = \tau_{max}$$

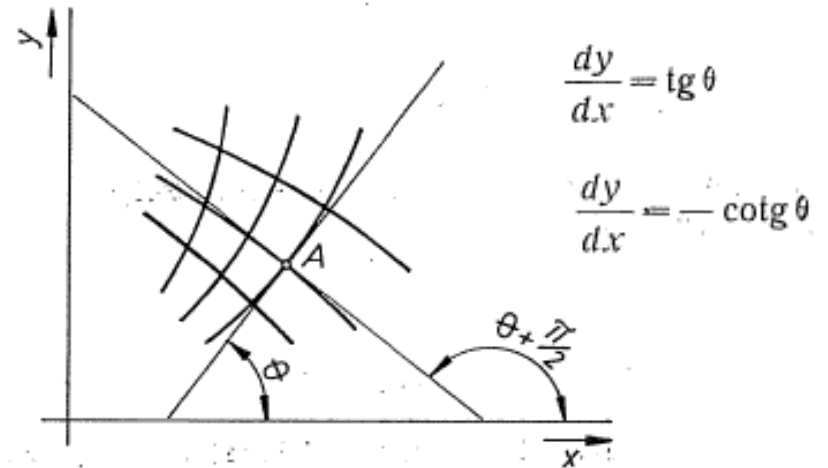
$$\sigma_x = \sigma_m + k \sin(\pi - 2\theta) = \sigma_m + k \sin 2\theta = \sigma_m + \tau_{max} \sin 2\theta$$

$$\sigma_y = \sigma_m - k \sin(\pi - 2\theta) = \sigma_m - k \sin 2\theta = \sigma_m - \tau_{max} \sin 2\theta$$

$$\tau_{xy} = k \cos(\pi - 2\theta) = -k \cos 2\theta = -\tau_{max} \cos 2\theta$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$



$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cot \theta$$

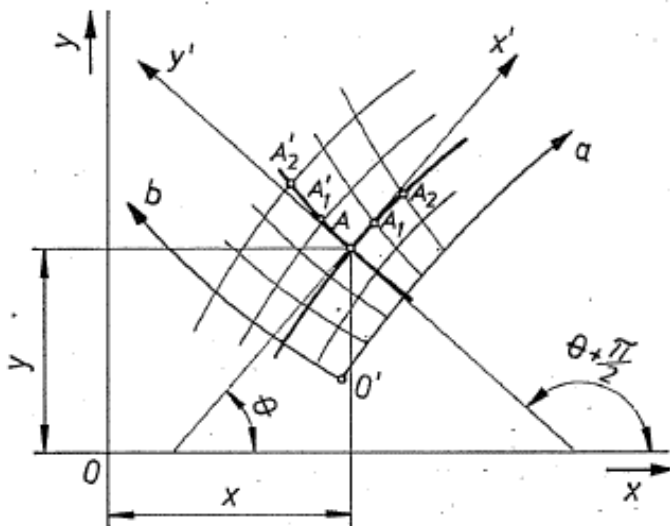
$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} + 2k \left(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial y} - 2k \left(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0$$



METODA LINIJA KLIZANJA

Hencky-jeve jednačine (integrali) – ekvivalentne jednačinama ravnoteže



$$\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} + 2k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial y} - 2k \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

$$\sigma_m + 2k\theta = C_1 = \text{const.}$$

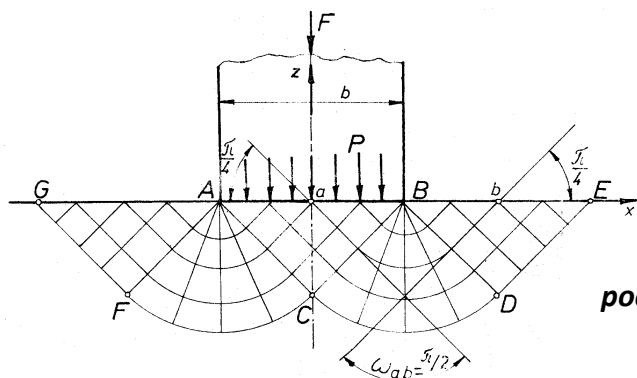
$$\sigma_m - 2k\theta = C_2 = \text{const.}$$

$$\sigma_{m A1} - \sigma_{m A2} = \pm 2k (\theta_{A1} - \theta_{A2})$$

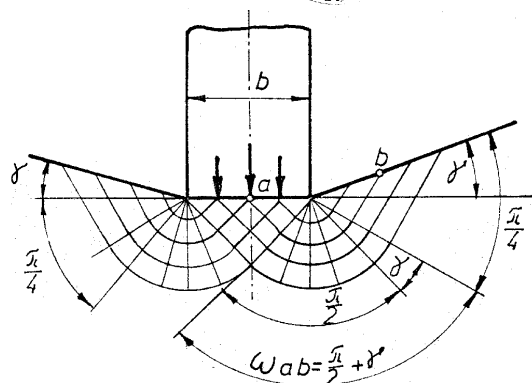


Polja linija klizanja prema Prandtl-u

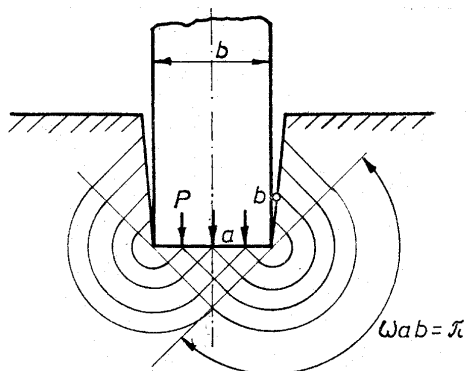
METODA LINIJA KLIZANJA



početna faza utiskivanja



među-faza utiskivanja



završna faza utiskivanja

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = 2k$$

$$\sigma_a - \sigma_b = \pm 2k \cdot (\omega_a - \omega_b) = \pm 2 \cdot k \cdot \omega_{ab}$$

σ_{max} - maksimalni normalni napon

σ_{min} - minimalni normalni napon

$2k$ - napon tečenja (za ravansko stanje)

σ_a, σ_b - srednji normalni napon u tački **a**, odnosno **b**

ω_a, ω_b - ugao linija klizanja u tačkama **a**, odnosno **b**

ω_{ab} - ugao zaokretanja posmatrane linije klizanja kojoj se nalaze tačke **a** i **b**

$$p_{pf} = -\sigma_z = 2k(1 + \omega_{ab}) = 2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$p_{mf} = 2k(1 + \omega_{ab}) = 2k\left(1 + \frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

$$p_{zf} = 2k(1 + \omega_{ab}) = 2k(1 + \pi)$$

$$F = p \cdot A = p \cdot b \cdot l$$



Energetska hipoteza – Missesov kriterijum

Prema energetske hipotezi, plastična deformacija nastaje kada energija promene oblika bilo kog naponskog stanja dostigne energiju promene oblika jednoosnog naponskog stanja.

Ukupna energija pri deformaciji tela troši se na promenu oblika (W_O) i promenu njegove zapremine (W_V):

$$W = W_O + W_V$$

$$W_O = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

$$W_V = \frac{1}{2} \Delta V \cdot \sigma_{sr} = \frac{1}{6E}(1-2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2R_e^2 = 2\sigma_e^2 = 2K^2$$

Ekvivalentan (efektivni napon)

$$\sigma_e = K = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

• Jednoosno naponsko stanje

$$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_e = \sigma_1 = K$$

• Troosno naponsko stanje

$$\sigma_1 = \sigma_2 \text{ ili } \sigma_2 = \sigma_3 \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (\varepsilon_1 = -\varepsilon_3, \quad \varepsilon_2 = 0)$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = K$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} K$$

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \beta \cdot K$$

$$1 < \beta < \frac{2}{\sqrt{3}}$$



METODA DEFORMACIONOG RADA

Bazira na činjenici da je pri plastičnoj deformaciji rad aktivnih spoljnih (W_a) sila veći od rada unutrašnjih sila (W_u) za onaj iznos koji se odnosi na rad kontaktnog trenja (W_t)

$$W_a = W_u + W_t \Rightarrow W_u = W_a - W_t$$

$$W_u = W_O + W_V$$

$$W_V = 0$$

$$W_a = F \cdot \Delta h$$

$$dW_u = dW_O = (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dV \Rightarrow W_u = \iiint_V \sigma_e \varepsilon_e dV = W_d$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

$$W_t = \iint_A \tau_k \cdot u_k \cdot dA = \tau_k \iint_A \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot dA$$

$$F = \frac{1}{\Delta h} \iiint_V \sigma_e \varepsilon_e dV + \iint_A \tau_k \cdot u_k \cdot dA$$

$$p_{sr} = \frac{F}{A}$$



VARIJACIONA METODA

Teorema: Zbir radova svih spoljnih i unutrašnjih sila na mogućim pomeranjima oko ravnotežnog položaja je jednak nul.

$$\delta(W_{sp} + W_u) = 0$$

$$\delta W_{sp} = \iint_A (S_x \cdot \delta u_x + S_y \cdot \delta u_y + S_z \cdot \delta u_z) \cdot dA \quad (\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z - \text{virtualna pomeranja})$$

$$\delta W_u = \iiint_V \sigma_e \delta \varepsilon_e dV$$

$$\delta W_u = \delta W_a - \delta W_t \quad \delta u_z = 0 \Rightarrow \delta W_a = 0 \Rightarrow \delta W_u = -\delta W_t$$

$$\delta \left[\iiint_V \sigma_e \varepsilon_e dV - \iint_A \tau_k \cdot u_k \cdot dA \right] = 0$$

Koristi se za određivanje deformacione sile, srednjih pritisaka, raspored napona i deformacija po zapremini.



METODA GORNJE GRANICE

Koristi se za određivanje ukupne sile, odnosno snage deformisanja.

Ekstremalni princip: **Snaga površinskih sila u procesu deformisanja za stvarno polje brzina manja je od snage površinskih sila za kinematski moguće polje brzina**

Glavne prednosti

- ne zahteva korišćenje glomaznog matematičkog aparata
- brzo se dolazi do približne vrednost deformacione sile
- polje brzina (raspored i veličina) po preseku obratka – tečenje materijala

Glavni nedostaci

- ne može odrediti naponsko stanje unutar deformisanog tela
- vrednost deformacione sile uvek je veća od stvarne



Teorijske osnove metode gornje granice

Prager i Hodge , nadgradio Drucker

Osnovna formulacija:

Među svim kinematski dozvoljenim poljima brzine deformacije, stvarno je ono polje koje sledeći izraz čini minimalnim.

$$J^* = \frac{2 \cdot \sigma_e}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV + \int_{S_T} \tau \cdot |\Delta v| \cdot dA - \int_{S_i} T_i v_i ds$$

σ_e - efektivni napon

$\dot{\epsilon}_{ij}$ - komponente brzine deformacije

τ - tangencijalni napon

Δv - diskontinuitet brzine

T_i - vučna snaga (spolja primenjena)

Stvarna snaga (odnosno deformaciona sila izračunata na osnovu te snage) potrebna za konkretan proces deformisanja nikada nema veću vrednost od one dobijene gornjim izrazom

Prvi član - snaga plastičnog deformisanja zapremine tela

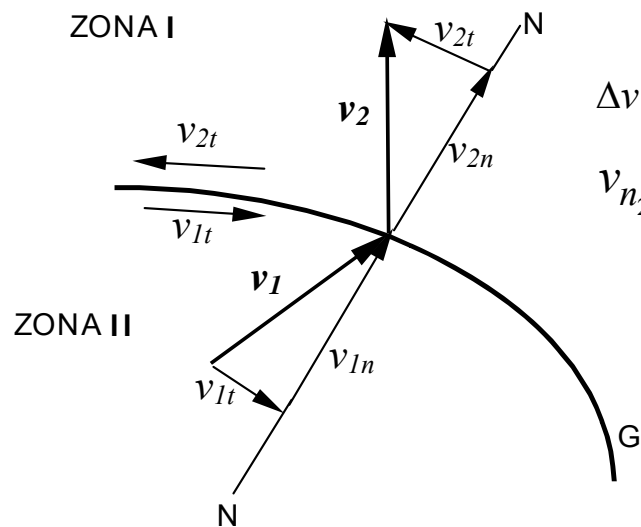
Drugi član - snaga potrebna za savladavanje otpora trenja na površinama diskontinuiteta brzine uključujući i granične površine alat-materijal

Treći član - snaga koja potiče od spoljnih sila,



Kinematiki moguće polja brzina

Diskontinuitet brzina



$$\Delta v = v_{t2} - v_{t1}$$

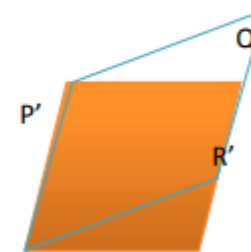
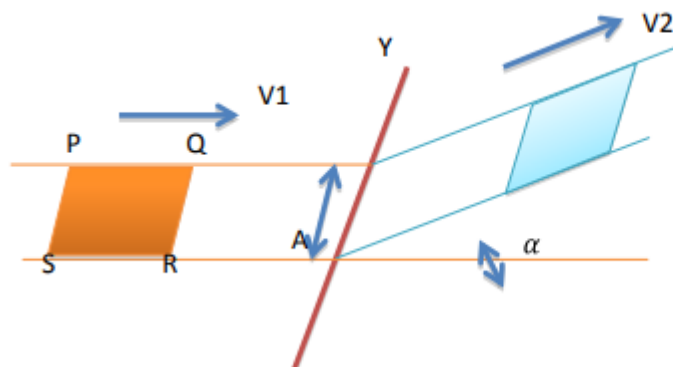
$$v_{n2} = v_{n1}$$

$$W_s = \int_{\Gamma} \tau |\Delta v| dA$$

Pod kinematski dozvoljenim poljem brzine podrazumeva se ono polje koje zadovoljava sledeća dva uslova:

- uslov kontinuiteta (konstantnosti zapremine)
- granične uslove brzine

$$\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = 0$$





Ukupna snaga (\dot{W}_{tot}) potrebna za deformisanje i ukupna deformaciona sila (F_{tot})

$$\dot{W}_{tot} = \dot{W}_d + \dot{W}_s + \dot{W}_f = \frac{2 \cdot k}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} dV + \int_{S_\Gamma} \tau \cdot |\Delta v| \cdot dA - \int_{S_t} T_i v_i ds \quad F = \frac{W}{v_0}$$

Snaga unutrašnjeg deformisanja \dot{W}_d

Snaga potrebna za savladavanje trenja \dot{W}_s

$$\dot{W}_d = \frac{2 \cdot k}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\left(\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right)} dV$$

$$\dot{W}_d = \frac{2 \cdot k}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \left[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2 \left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 \right) \right]} dV$$

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$

$$\dot{W}_s = \iint_A \tau_k |\Delta v| \cdot dA$$

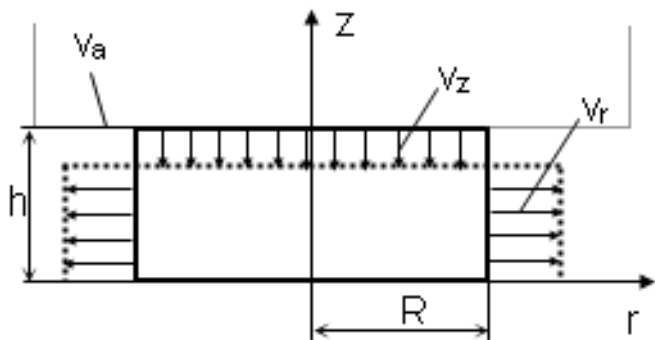
$$\tau_k = \frac{m}{\sqrt{3}} \sigma_e \quad \text{- duž površina diskontinuiteta brzina}$$

$$\tau_k = \mu \cdot \sigma_e \quad \text{- duž graničnih površina alata-obradak}$$



ANALIZA SLOBODNOG SABIJANJA PRIMENOM METODE GORNJE GRANICE

$$\dot{W}_{tot} = \dot{W}_d + \dot{W}_s + \dot{W}_f = \frac{2 \cdot \sigma_o}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV + \int_{S_T} \tau \cdot |\Delta v| \cdot dA - \int_{S_i} T_i v_i ds$$



$$\dot{W}_d = \frac{2 \cdot k}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\left(\frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \right)} dV$$

$$\dot{W}_s = \iint_A \tau_k |\Delta v| \cdot dA$$

$$\dot{W}_f = 0$$

Komponente brzine

$$v = f(v_r, v_\theta, v_z) \quad \begin{aligned} v_r, v_z &\neq 0 \\ v_\theta &= 0 \end{aligned}$$

$$v_r = f(r)$$

$$v_z = f(z)$$

Uslov konstantnosti zapremine

$$v_z = \frac{z}{h} \cdot v_a$$

$$2R\pi \cdot h \cdot v_r = R^2\pi \cdot v_z \Rightarrow v_r = -\frac{1}{2} \frac{R}{h} \cdot v_z$$



Komponente brzine deformacije

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} =$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \frac{v_z}{h}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{v_z}{h}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = 0$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) = 0$$

Snaga unutrašnje deformacije

$$\dot{W}_d = \frac{2 \cdot k}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\frac{1}{2} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2)} dV$$

$$\dot{W}_d = \frac{2 \cdot k}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \frac{v_z^2}{h^2} + \frac{1}{4} \frac{v_z^2}{h^2} + \frac{v_z^2}{h^2} \right)} dV = \frac{2 \cdot k}{\sqrt{3}} \frac{3}{2} \frac{v_z}{h} \int_V dV \quad dV = R^2 \pi h$$

$$\dot{W}_d = k \cdot h \cdot R^2 \pi$$



Snaga kontaktnog trenja

$$\dot{W}_s = \iint_A \tau_k |\Delta v| \cdot dA \quad \tau_k = \frac{m}{\sqrt{3}} k \quad \Delta v = v_{r(z=0,h)} - 0 = -\frac{1}{2} \frac{R}{h} v_z$$

$$\dot{W}_s = \iint_A \tau_k |\Delta v| \cdot dA = -\frac{2m \cdot k}{\sqrt{3}} \int_0^R 2\pi R v_z dr$$

$$\dot{W}_s = \frac{2\sqrt{3}}{9} m \cdot k \cdot \pi \frac{v_z}{h} R^3$$

Ukupna snaga

$$\dot{W}_{tot} = k \cdot h \cdot R^2 \pi + \frac{2\sqrt{3}}{9} m \cdot k \cdot \pi \frac{v_z}{h} R^3 = F \cdot v_z$$

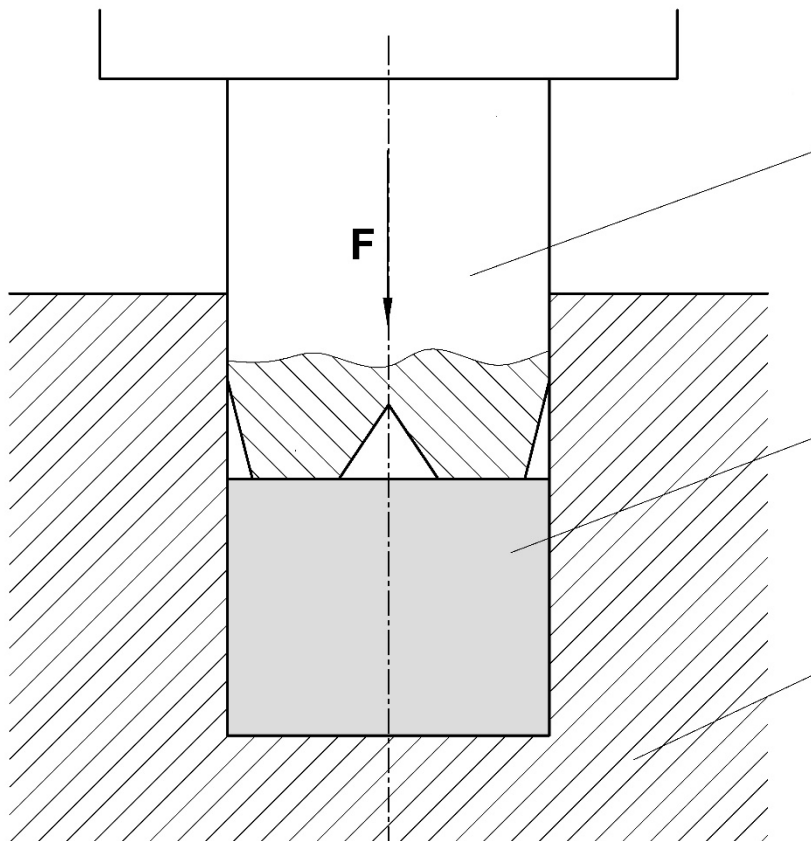


Deformaciona sila

$$F = \frac{\dot{W}_{tot}}{v_z} = A \cdot k \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot m \cdot \frac{R}{h} \right)$$

$$2R = D \quad m = \mu \cdot \sqrt{3}$$

$$F = A \cdot k \cdot \left(1 + \frac{\mu}{3} \cdot \frac{D}{h} \right)$$

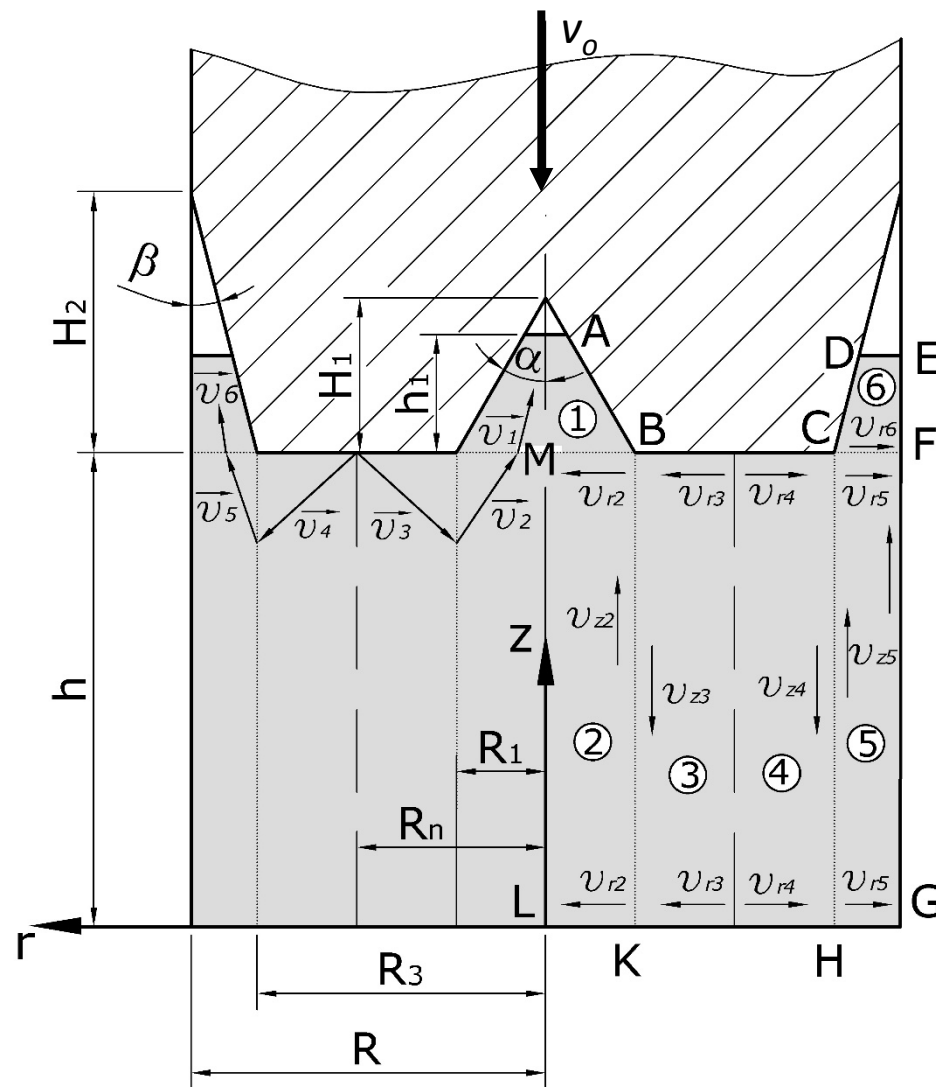


$$\frac{\partial v_{r3,4}}{\partial r} + \frac{v_{r3,4}}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_{\theta 3,4}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{z3,4}}{\partial z} = 0$$

$$r = R_n \Rightarrow v_{r3,4} = v_{r3} = v_{r4} = 0$$

$$v_{r3,4} = \frac{v_o \cdot r}{2h} + C_1$$

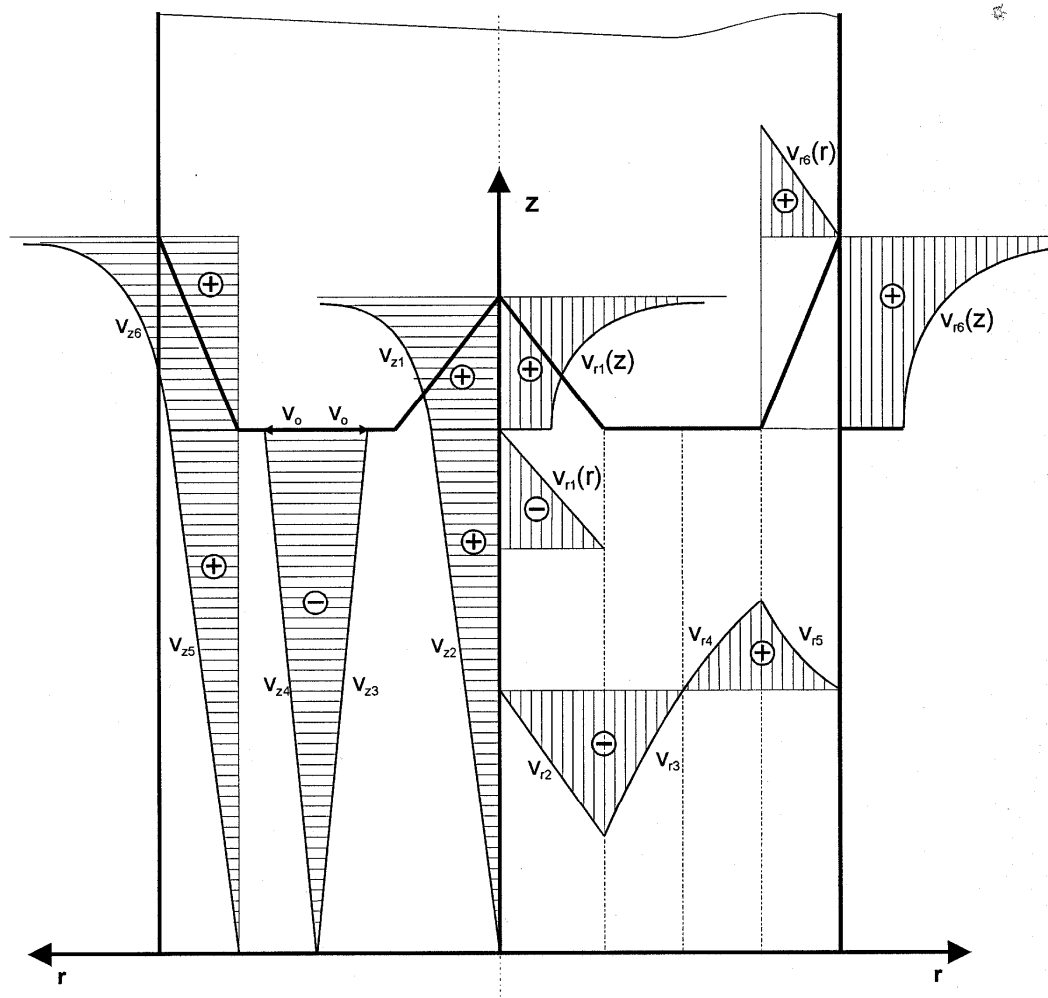
$$v_{r3,4} = v_{r3} = v_{r4} = \frac{v_o}{2h} \cdot \left(r - \frac{R_n^2}{r} \right)$$



$$\pi \cdot R_3 \cdot v_{r4|r=R_3} \cdot z = \frac{\pi}{2} (R_4^2 - R_3^2) \cdot v_{z5} \Rightarrow v_{z5} = \frac{v_o}{h} \cdot \frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} \cdot z$$



	Axial velocity (v_z)	Radials velocity (v_r)	Tangential velocity (v_θ)
Zone 1	$v_{z_1} = v_o \left(\frac{R_n^2}{R_1^2} - 1 \right) \cdot \frac{H_1^2}{(z - h - H_1)^2}$	$v_{r_1} = v_o \left(\frac{R_n^2}{R_1^2} - 1 \right) \cdot \frac{r \cdot H_1^2}{(z - h - H_1)^3}$	0
Zone 2	$v_{z_2} = \frac{v_o}{h} \cdot \left(\frac{R_n^2}{R_1^2} - 1 \right) \cdot z$	$v_{r_2} = \frac{v_o}{2h} \cdot \left(1 - \frac{R_n^2}{R_1^2} \right) \cdot r$	0
Zone 3	$v_{z_3} = -\frac{v_o}{h} \cdot z$	$v_{r_3} = \frac{v_o}{2h} \cdot \left(r - \frac{R_n^2}{r} \right)$	0
Zone 4	$v_{z_4} = -\frac{v_o}{h} \cdot z$	$v_{r_4} = \frac{v_o}{2h} \cdot \left(r - \frac{R_n^2}{r} \right)$	0
Zone 5	$v_{z_5} = \frac{v_o}{h} \cdot \frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} \cdot z$	$v_{r_5} = \frac{v_o}{2h} \cdot \frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} \cdot \left(\frac{R_4^2 - r^2}{r} \right)$	0
Zone 6	$v_{z_6} = v_o \cdot \frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} \cdot \frac{H_2^2}{(h + H_2 - z)^2}$	$v_{r_6} = v_o \cdot \frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} \cdot \frac{H_2^2 \cdot (R_4 - r)}{(h + H_2 - z)^3}$	0



$$W_{tot} = W_d + W_s + W_f \quad F = \frac{W}{v_0}$$

$$\varphi_{rr1} = \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} = v_o \left(\frac{R_n^2}{R_l^2} - 1 \right) \cdot \frac{h_l^2}{(z-h-h_l)^3} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\varphi_{\theta\theta1} = \frac{v_{r1}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta1}}{\partial \theta} = v_o \left(\frac{R_n^2}{R_l^2} - 1 \right) \cdot \frac{h_l^2}{(z-h-h_l)^3}$$

$$\varphi_{zz1} = \frac{\partial v_{z1}}{\partial (h+h_l-z)} = 2 \cdot v_o \left(\frac{R_n^2}{R_l^2} - 1 \right) \cdot \frac{h_l^2}{(z-h-h_l)^3}$$

$$\varphi_{zr1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{r1}}{\partial (h+h_l-z)} + \frac{\partial v_{z1}}{\partial r} \right) = \frac{2}{3} \cdot v_o \left(\frac{R_n^2}{R_l^2} - 1 \right) \cdot \frac{r \cdot h_l^2}{(z-h-h_l)^4}$$

$$\varphi_{r\theta1} = \varphi_{\theta z1} = 0$$

$$\varphi_{rr2} = \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} = \frac{v_o}{2h} \left(1 - \frac{R_n^2}{R_l^2} \right)$$

$$\varphi_{\theta\theta2} = \frac{v_{r2}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta2}}{\partial \theta} = \frac{v_o}{2h} \left(1 - \frac{R_n^2}{R_l^2} \right)$$

$$\varphi_{zz2} = \frac{\partial v_{z2}}{\partial r} = \frac{v_o}{2} \left(\frac{R_n^2}{R_l^2} - 1 \right)$$

$$\varphi_{r\theta2} = \varphi_{\theta z2} = \varphi_{zr2} = 0$$



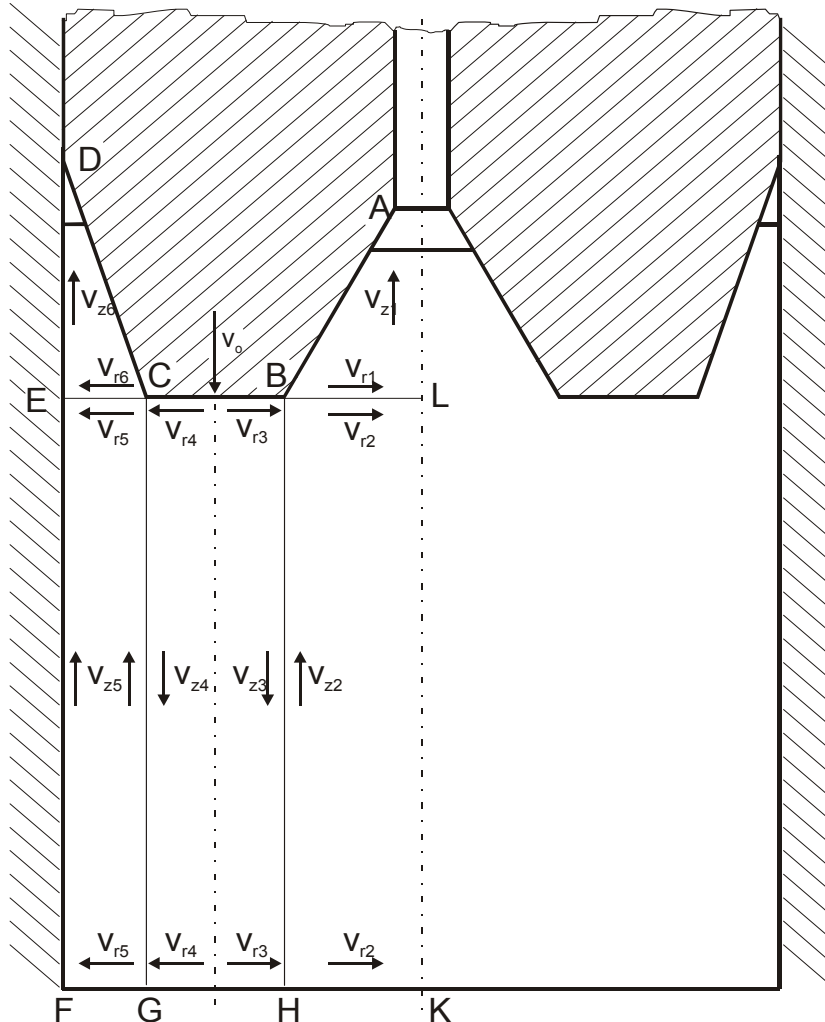
Ukupna snaga unutrašnje deformacije

$$W_{d_{ukupno}} = 2 \cdot (W_{d_1} + W_{d_2} + W_{d_{3,4}} + W_{d_5} + W_{d_6})$$

$$W_{d_{ukupno}} = 2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot v_o \cdot h_I^2}{9} \left(\frac{R_n^2}{R_I^2} - 1 \right) \cdot \left(\sqrt{(1 + 3 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha_o)^3} - 1 \right) \operatorname{Ln} \frac{H_1}{H_1 - h_1} + \\ & \frac{k \cdot \pi \cdot v_o}{2} \cdot (R_n^2 - R_I^2) + \frac{k \cdot \pi \cdot v_o}{2} \cdot (R_3^2 - R_I^2) \cdot \left(1 + \frac{R_n^4}{6 \cdot R_I^2 \cdot R_3^2} \right) + \\ & \frac{k \cdot \pi \cdot v_o}{2} \cdot (R_3^2 - R_n^2) \cdot \left(1 + \frac{R_4^2}{6 \cdot R_3^2} \right) + \\ & \frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot v_o \cdot h_2^2}{9} \cdot \left(\frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} \right) \cdot \left(\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_o)^3} - 1 \right) \operatorname{Ln} \frac{H_2}{H_2 - h_2} \end{aligned} \right\}$$



Gubitak snage duž površina sa diskontinuitetima brzina (usled unutrašnjeg trenja)



$$W_{Sukupno} = 2 \cdot (W_{SCG} + W_{SBH} + W_{SBL} + W_{SCE} + W_{SFG} + W_{SGH} + W_{SHK})$$

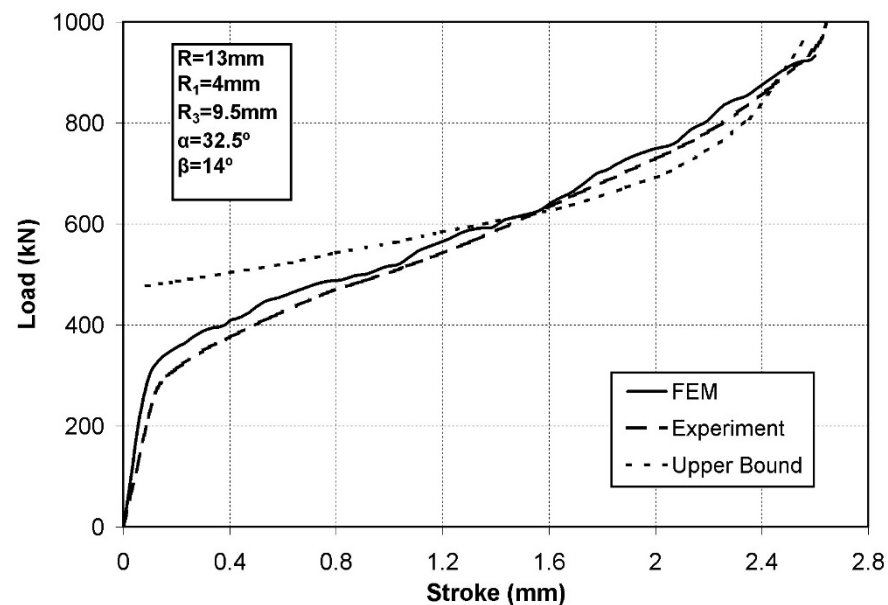
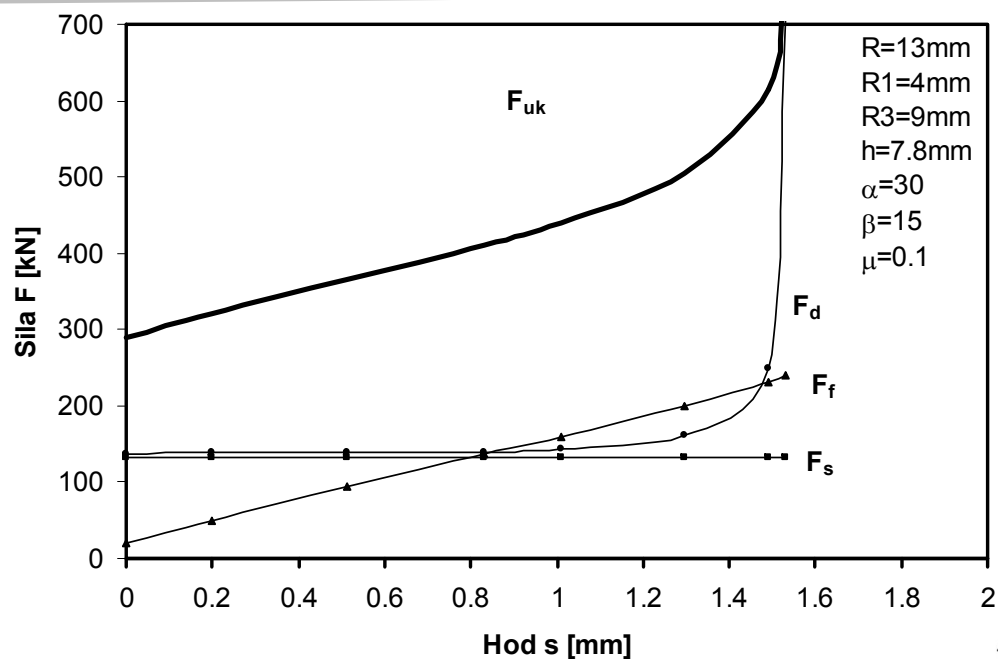
$$W_{Sukupno} = 2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{m \cdot k}{2\sqrt{3}} \cdot \pi \cdot v_o \cdot h \cdot R_3 \cdot \left(\frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} + 1 \right) + \frac{m \cdot k}{2\sqrt{3}} \cdot \pi \cdot v_o \cdot h \cdot \frac{R_n^2}{R_l} + \\ & \frac{m \cdot k \cdot \pi \cdot v_o}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{R_n^2}{R_l^2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h_l} \right) \frac{R_l^3}{3} + \\ & \frac{m \cdot k \cdot \pi \cdot v_o}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} \left[R_4(R_4 - R_3) \left(\frac{R_4}{h} - \frac{R_4 + R_3}{H_2} \right) + \frac{2h - H_2}{h \cdot H_2} \frac{R_4^3 - R_3^3}{3} \right] + \\ & \frac{m \cdot k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{v_o \cdot \pi}{2h} \cdot \left(\frac{R_3^2 - R_2^2}{R_4^2 - R_3^2} \right) \left[R_4^2(R_4 - R_3) - \frac{R_4^3 - R_3^3}{3} \right] + \\ & \frac{m \cdot k \cdot \pi \cdot v_o}{2\sqrt{3} \cdot h} \left[R_n^2(2R_n - R_l - R_3) + \frac{R_3^3 + R_l^3 - 2R_n^3}{3} \right] + \\ & \frac{m \cdot k \cdot \pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{v_o \cdot R_l^3}{6 \cdot h} \cdot \left(\frac{R_n^2}{R_l^2} - 1 \right) \end{aligned} \right\}$$

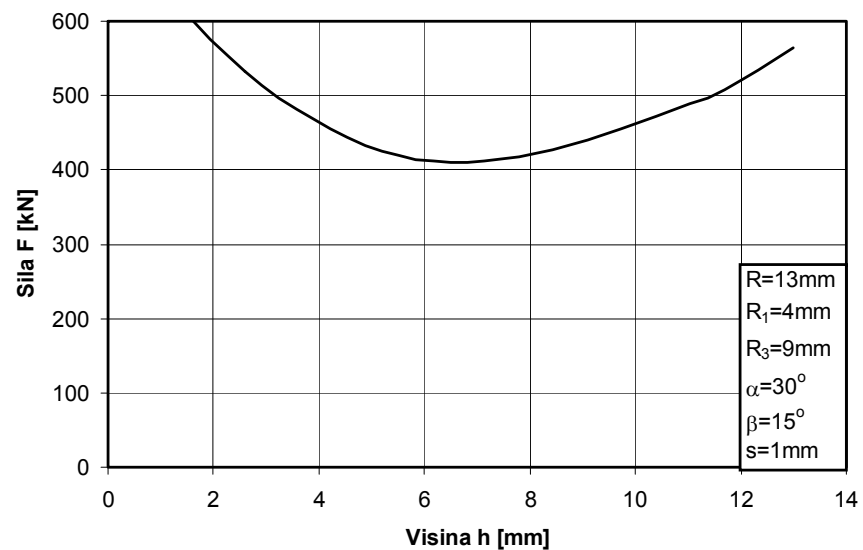
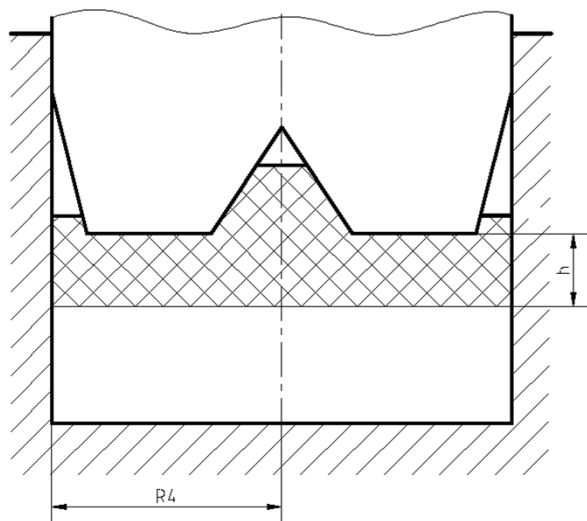
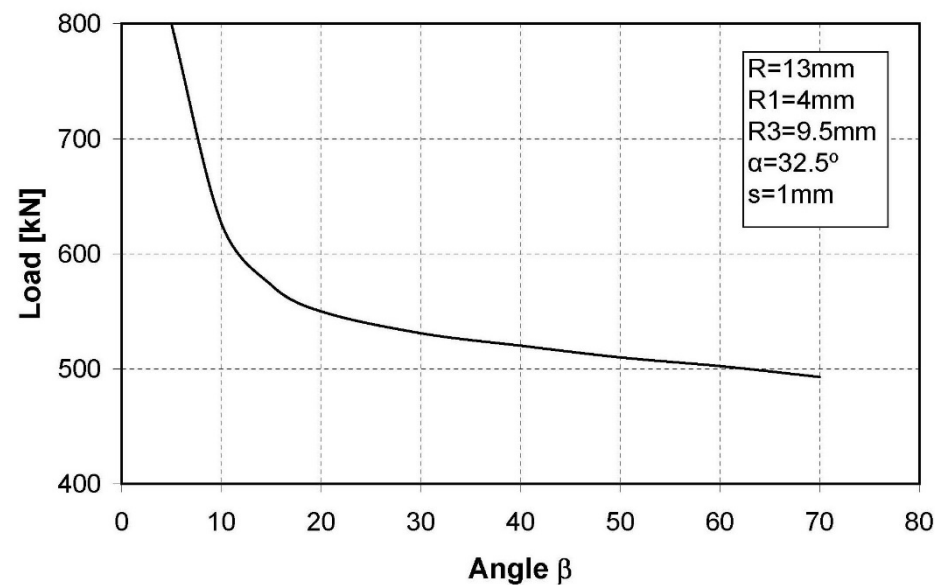
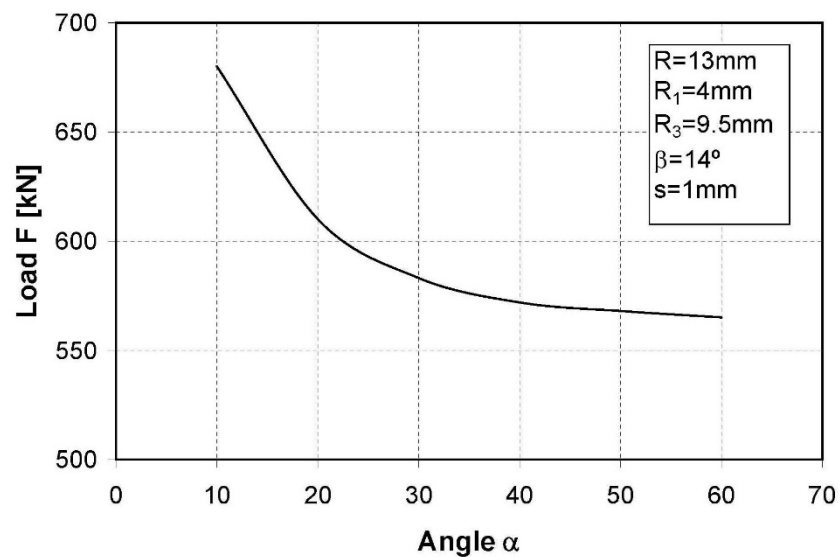


Gubitak snage duž graničnih površina alat-obrađak usled spoljašnjeg trenja

$$W_{f_{ukupno}} = 2 \cdot (W_{f_{AB}} + W_{f_{BC}} + W_{f_{CD}} + W_{f_{DE}} + W_{f_{EF}})$$

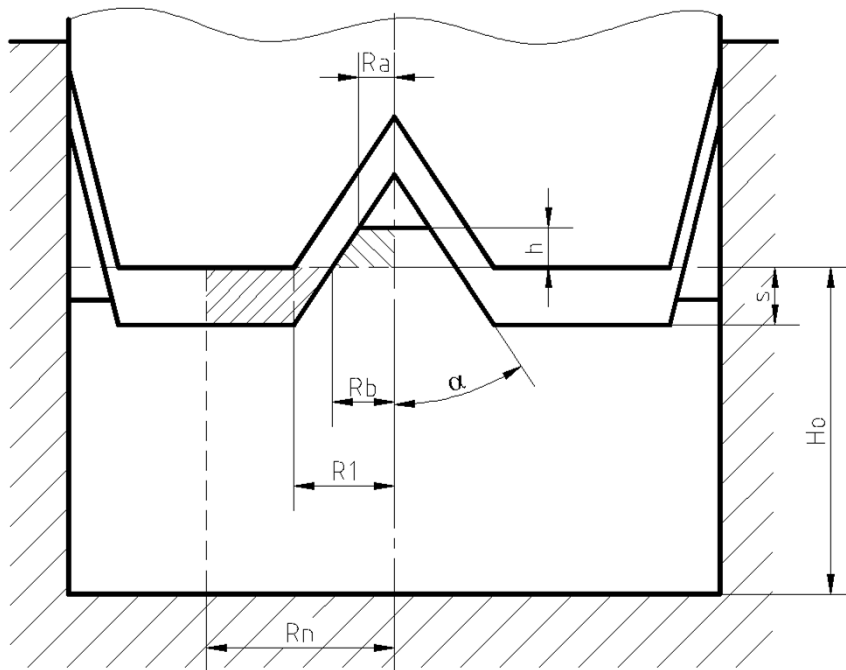
$$W_{f_{ukupno}} = 2 \left\{ \begin{aligned} & \mu \cdot k \cdot \pi \cdot v_o \cdot \frac{R_l}{H_l} \cdot \left[\frac{(H_l + h) \cdot h_l - \frac{1}{2}(h + h_l)^2 + \frac{1}{2}h^2 - \left(\frac{R_n^2}{R_l^2} - 1 \right) \cdot \frac{H_l^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg} \alpha_o}}{\cos \alpha_o} \cdot \ln \frac{H_l - h_l}{H_l}} \right] + \\ & \frac{\mu \cdot k \cdot \pi \cdot v_o}{2h} \left[R_n^2 (2R_n - R_l - R_3) + \frac{R_3^3 + R_l^3 - 2R_n^3}{3} \right] + \\ & \mu \cdot k \cdot \pi \cdot v_o \cdot \frac{(R_4 - R_3)}{H_2} \cdot \left[\left(\frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} \right) \cdot \frac{H_2^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg} \beta_o}}{\cos \alpha_o} \cdot \ln \frac{H_2 - h_2}{H_2} + \right. \\ & \quad \left. (H_2 + h) \cdot h_2 - \frac{1}{2}(h + h_2)^2 + \frac{1}{2}h^2 \right] + \\ & \mu \cdot k \cdot \pi \cdot v_o \cdot R_4 \cdot H_2^2 \left(\frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} \right) \left(\frac{1}{h + H_2 - h_2} - \frac{1}{h + H_2} \right) + \\ & \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot k \cdot \pi \cdot v_o \cdot R_4 \cdot h \cdot \frac{R_3^2 - R_n^2}{R_4^2 - R_3^2} \end{aligned} \right\}$$







Neutralni radius



$$\frac{\partial F}{\partial R_n} = 0$$

$$(R_n^2 - R_l^2) \cdot \pi \cdot s + \left[R_l^2 \cdot \pi \cdot s - \frac{s \cdot \pi}{3} (R_l^2 + R_l R_b + R_b^2) \right] = \frac{h \cdot \pi}{3} (R_b^2 + R_b R_a + R_a^2)$$

$$R_n^2 = \frac{h}{3s} (R_b^2 + R_b R_a + R_a^2) + \frac{l}{3} (R_l^2 + R_b^2 + R_b R_l)$$

