**TEORIJSKE OSNOVE METODE KONAČNIH ELEMENATA**

Analiza procesa i fizičkih fenomena pomoću metode konačnih elemenata danas svakako predstavlja najpopularniji i najviše korišćeni matematički postupak, koji se uspešno primenjuje kako za potrebe naučnih istraživanja, tako i inženjersku praksu. Osnovne karakteristike metode konačnih elemenata koje je dovode ispred drugih metoda sastoje se u njenoj opštosti (primenjiva je na oblasti solida, fluida, provođenja toplote i uopšte na probleme fizičkih veličina), primenjivosti na linearne i nelinearne probleme kao i pogodnosti primene računara (rešavanje velikog sistema jednačina) [8.23, 8.24].

Teorijske osnove metode konačnih elemenata postavljene su još 40-tih godina prošlog veka [8.24], dok njena šira primena u industrijskoj praksi datira od 70-ih, kada je korišćena za potrebe strukturnih analiza konstrukcija [8.25]. U početku ova metoda se isključivo koristila za rešavanje linearnih problema u okviru 2D analiza. Kasnije, Oden [8.26]. značajno uopštava metodu, uvodeći u nju trodimenzionalnost, nelinearnost, dinamiku struktura, talasno prostiranje, uticaj fluida i optimalnost struktura, čime ona postaje moćna i nezaobilazna alatka pri analizi velikog broja različitih procesa i fenomena. Kako su procesi deformisanja po svojoj strukturi nelinearni, sa velikim brojem uticajnih parametara, tek razvojem snažnijih računara, sredinom 80-tih MKE počinje se primenjivati i u oblasti plastičnosti. U to vreme su izvršene prve simulacije jednostavnh procesa deformisanja (sabijanje valjka i istosmerno istiskivanje) u okviru kojih je materijal posmatran kao kruto plastičan [8.27]. Tek intenzivnim razvojem računara početkom 90-tih, uvođenjem termo-mehaničke analize, brzine deformisanja, elasto-plastičnih i elasto-viskoplastičnih modela, napretkom u modelovanju kontaktnih i graničnih uslova, razvoju efikasnih algoritama (solvera) za rešavanje i dr. stvorene su pretpostavke za punu primenu MKE u oblasti obrade deformisanjem. Danas na tržištu postoji veliki broj komercijalnih softwera na bazi MKE koji se koriste za simulacije procesa deformisanja (Abaqus, QForm, DEFORM, Simufact.Forming, Pam-Stamp, AutoForm, itd.).

Metoda konačnih elemenata spada u metode diskretne analize. Za razliku od ostalih numeričkih metoda, koje se zasnivaju na matematičkoj diskretizaciji jednačina graničnih problema, MKE se zasniva na fizičkoj diskretizaciji razmatranog područja. Umesto elementa diferencijalno malih dimenzija, osnovu za sva proučavanja predstavlja deo područja konačnih dimenzija, manje područje ili konačni element. Zbog toga su osnovne jednačine pomoću kojih se opisuje stanje u pojedinim elementima, a pomoću kojih se formuliše i problem u celini, umesto diferencijalnih ili integralnih, obične algebarske. Sa stajališta fizičke interpretacije, to znači da se razmatrano područje, kao kontinuum sa beskonačno mnogo stepeni slobode, zamenjuje diskretnim modelom međusobno povezanih konačnih elemenata, sa konačnim brojem stepeni slobode. S obzirom na to da je broj diskretnih modela za jedan granični problem neograničeno veliki, osnovni zadatak je da se izabere onaj model koji najbolje aproksimira odgovarajući granični problem. Suština aproksimacije kontinuuma MKE sastoji se od sledećem [8.1]:

- Posmatrani domen kontinuuma se deli pomoću zamišljenih linija ili površi na određeni broj poddomena konačnih dimenzija koji se nazivaju konačnim elementima i zajedno čine mrežu konačnih elemenata. Izbor tipa konačnog elementa (linijski, ravanski, prostorni) i veličine tj.

ukupnog broja elemenata je jedan od najvažnijih koraka jer direktno utiče na kvalitet rešenja.

- Konačni elementi su međusobno povezani u konačnom broju tačaka koje se nalaze na konturi elemenata i nazivaju se čvorovi.
- Stanje promenljive (npr. polje pomeranja, deformacija, neprezanje, temperatura) u svakom konačnom elementu se opisuje pomoću interpolacionih funkcija (ili funkcija oblika)
- Parametri u čvorovima su osnovne nepoznate veličine u MKE.
- Interpolacione funkcije su unapred zadate funkcije za jedan tip KE i predstavljaju vezu između vrednosti promenljive polja u bilo kojoj tački KE i vrednosti promenljive polja u čvorovima. U MKE se uglavnom koriste polinomi kao interpolacione funkcije i to: Lagrange-ovi polinomi, Serendipitz funkcije i Hermite-ovi polinomi [8.24].

Prema načinu na koji se izvode i formulišu osnovne jednačine metoda konačnih elemenata, odnosno jednačine za pojedine konačne elemente, postoje četiri osnovna vida MKE i to: direktna metoda, varijaciona metoda, metoda reziduuma i metoda energetskog balansa [8.24]. U proračunima baziranim na metodi konačnih elemenata kao nepoznate usvajaju se: kinamatske veličine (pomeranja, izvodi pomeranja, deformacije, brzine deormacija itd), statičke veličine (unutrašnje sile, komponente napona itd.) i mešovite kinematsko-statičke veličine. U skladu sa prethodnim tj. u zavisnosti od izbora osnovnih nepoznatih u čvorovima mreže konačnih elemenata razlikuju se sledeći vidovi MKE: metoda deformacije, metoda sila i mešovita (hibridna) metoda.

Sa teorijskog stanovišta direktna metoda je najjednostavnija i na bazi nje biće objašnjeni principi MKE. Na slici 8.1 prikazan je konačni element izdvojen iz sistema elemenata. Kontura ovoga element sastoji se iz određenog broja čvornih tačaka ili čvorova označenih sa 1,2,3…k,…K. U opštem slučaju veza između promene neke funkcije u elementu i njenih vrednosti u čvorovima elementa sledećeg je oblika:

$$\phi(x,y,z) = N_k(x,y,z) \cdot \phi^k = [N_1, N_2 \ldots N_k \ldots N_n] \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \vdots \\ \phi^k \\ \vdots \\ \phi^n \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

gde je $N_k(x,y,z)$ interpolaciona funkcija koja odgovara čvoru k, a $\phi^k$ vrednost funkcije u čvoru (k). Pod funkcijom ϕ (x,y,z) podrazumeva se bilo koja skalarna funkcija i neka druga veličina koja je usvojena kao nepoznata. Ako se kao osnovne nepoznate u čvorovima usvoje pomeranja tada veza između pomeranja u čvorovima i pomeranja tačaka unutar elementa glasi:

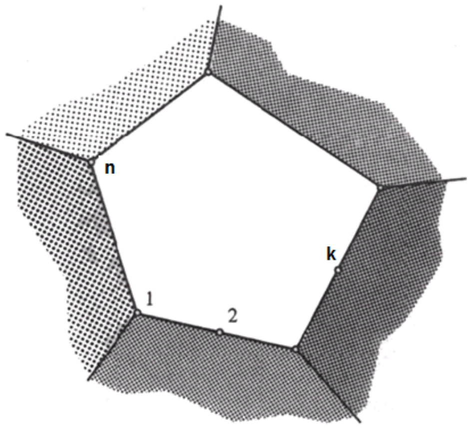
$$\{u\} = [N]\{q\} \tag{8.2}$$

pri čemu je:

**u** - vektor generalisanih pomeranja u tačkama elementa

**N** – matrica interpolacionih funkcija

**q** – vektor parametara pomeranja u čvorovima elementa




*Slika 8.1 – Konačni element sa n – čvorova*

Prema teoriji elastičnosti deformacije tačaka unutar elementa **ε** i pomeranja **u** mogu se povezati putem odgovajućeg operatora **L**. Prikazano u matričnom obliku ova veza glasi:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \tag{8.3}$$

Zamenom 8.2 u 8.3 sledi da je:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{q\} = [B]\{q\} \tag{8.4}$$

gde je [B] matrica operator koja povezuje deformacije unutar elementa i pomeranja čvorova elemenata. U sledećem koraku vrši se povezivanje napona unutar elemenata i deformacija, odnosno pomeranja čvornih tačaka.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{8.5}$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q\} = [S]\{q\} \tag{8.6}$$

Matrica [S] je operator koji opisuje vezu između napona unutar elementa i pomeranja čvorova elemenata.

Generalisane sile kao koncentrisane sile u čvorovima elemenata, koje su ekvivalentne komponentnim naponima duž kontura elemenata, mogu se prikazati u sledećem obliku:

$$\{F\} = [T]\{\sigma\} \tag{8.7}$$

U gornjem izrazu [T] je pravougaona matrica sa n vrsta i m kolona (m- broj komponenti u vektoru napona) i predstavlja vezu generisanih sila i napona, odnosno definiše uslove ravnoteže. Kombinovanjem izraza 8.6 i 8.7 dobija se:

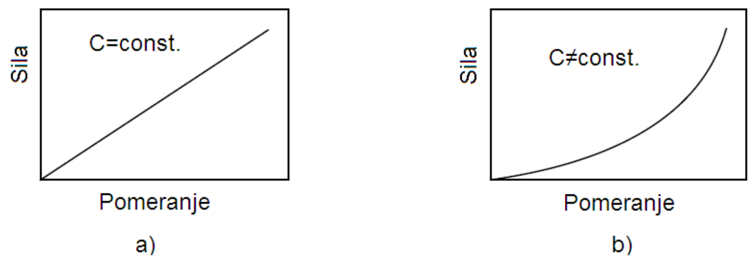
$$\{F\} = [T][S]\{q\} = [K]\{q\} \tag{8.8}$$

gde je [K]= [T] [S]= [T] [D] [B] tkz. matrica krutosti elementa. Kod jednostavnih slučajeva opterećenja do matrice krutosti elementa dolazi se veoma lako korišćenjem osnovnih postulata teorije elastičnosti (veza napon-deformacija, veza deformacija-pomeranje). Poznavanjem matrice krutosti nepoznata pomeranja čvorova određuju se iz jednačine (8.8), tj.:

$$\{q\} = [K]^{-1}\{F\} \tag{8.9}$$

Prikazanu proceduru potrebno je sprovesti za svaki element, nakon čega se na bazi sinteze formiraju odgovarajuće matrične jednačine za čitavo telo.

Direktna metoda može se primeniti samo kod jednostavnijih problema i kod kojih je veza između aktivnih sila i pomeranja linearna (sl.8.2a), odnosno krutost strukture (C) konstantna. U slučajevima kompleksnih linearnih problema za formiranje matrice krutosti najčešće se koristi varijaciona metoda i princip minimuma potencijalne energije. [8.24]. Međutim kod većine realnih problema uključujući tu i procese deformisanja, odnos između aktivnih sila i pomeranja nije linearan (sl.8.2b) zbog čega se krutost strukture (C) menja. U opštem slučaju izvori nelinearnosti mogu biti: materijal, granični uslovi i geometrijska nelinearnost.




*Slika 8.2 – Linearni (a) i nelinearni (b) odnos sila-pomeranje*

Kod nelinearnih problema osnovne jednačine ravnoteže konačnog elementa izvode se na isti način kao u slučaju linearnih, pri čemu se pri njihovom formulisanju koristi princip virtuelnih pomeranja i opšte nelinearne jednačine mehanike kontinuuma. Tako jednačina (8.3) koja predstavlja vezu između deformacija (ε) i pomeranja u čvorovima (q) poprima sledeći oblik [8.28]:

$$\{\varepsilon\} = [L]_{lin.}\{u\} + \varepsilon_{nelin.}(u) = [B]_{lin.}\{q\} + \varepsilon_{nelin.}(q) \quad (8.10)$$

gde je

$[B]_{lin.}$ - linearna matrica transformacije

$[L]_{lin}$ - linearna matrica operator

$\varepsilon_{nelin.}$ - nelinearni deo deformacije

Ako se za vektor virtuelnih pomeranja usvoji vektor δq, tada izraz (8.10) može da se napiše kao:

$$\{d\varepsilon\} = \left([B]_{lin.} + [B]_{nelin.}\right)\{\delta q\} = [B]\{\delta q\} \tag{8.11}$$

gde je $[B]_{lnein}$ nelinearna matrica transformacije. Koristeći princip virtuelnog rada

$$\delta U = \delta W \tag{8.12}$$

pri čemu je δW viruelni rad spoljašnjih a δU virtuelni rad unutrašnjih sila, odnosno:

$$\{W\} = \int_V [Z]^T \{u\}\, dV + \int_S [p]\{u\}\, dS \tag{8.13}$$

$$\{U\} = \frac{1}{2}\int_V [\sigma]^T \{\varepsilon\}\, dV \tag{8.14}$$

proizilazi da je:

$$\{F\}^T \delta\{q\} = \int_V [\sigma]^T \{d\varepsilon\}\, dV = \int_V [\sigma]^T [B] dV \{\delta q\} \tag{8.15}$$

U izrazima (8,13, 8,14 i 8.15) sa {F} je označen vektor ekvivalentnog čvornog opterećcenja, [σ] je matrica Cauchy-jevih napona, [Z] su zapreminske sile, a [p] površinske sile. Pošto je vektor virtuelnih pomeranja različit od nule δq≠0, izraz (8.15) se svodi na:

$$[K]\{q\} = \{F\} \tag{8.16}$$

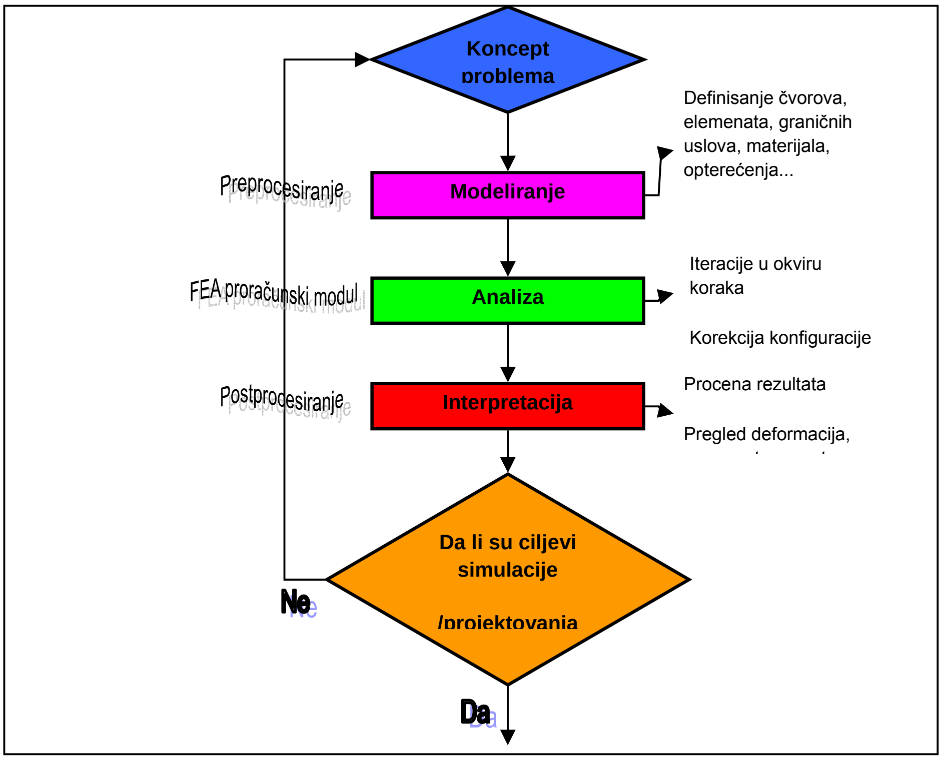
gde je

$$[K] = \int_V [B]^T [\sigma] dV \tag{8.17}$$

matrica krutosti sistema. Jednačina data izrazom (8.16) je nelinearna pošto je matrica krutosti elementa [K] nelinearna (u opštem slučaju zavisi od pomeranja i napona). Ako se umesto generalisanih pomeranja, za osnovne parametre u čvorovima, usvoje priraštaji pomeranja dobija se inkrementalna formulacija osnovnih jednačina. Za razliku od jednačina ravnoteže sa parametrima pomeranja kao nepoznatim veličinama, koje su nelinearne, inkrementalne jednačine ravnoteže su linearne i u njima su nepoznati inkrementi pomeranja [8.28].

Većina solvera u okviru MKE softvera za simulaciju procesa obrade deformisanjem (Simufact.Forming, ABAQUS itd.) pri rešavanju sistema nelinearnih jednačina koristi inkrementalni postupak baziran na modifikovanom Lagrange-ovom pristupu i Newton-Raphson-ov metod. Kod nelinearne analize rešenje se ne dobija rešavanjem sistema jednačina u jednom koraku, već je potrebno postepeno dolaziti do rešenja. Drugim rečima simulacija se deli na određeni broj inkremenata i traži rešenje za svaki inkrement, tako da se kombinuje inkrementalni i iterativni postupak traženja rešenja nelinearnog problema. U principu potreban je veliki broj iteracija da bi došlo do konvergentnog rešenja sistema nelinearnih jednačina.

Postupak numeričkog modelovanja pomoću MKE softwera može se u opštem slučaju podeliti u tri faze: pretprocesiranje, procesiranje i postpocesiranje (sl.8.3). Faza pretprocesiranja je najvažnija u čitavom postupku, i obuhvata sve aktivnost i radnje vezane za definisanje problema. Između ostalog u okviru ove faze definiše se početna geometrija, temperatura, karakteristike materijal modela, granični i kontaktni uslovi, generiše mreža konačnih elemenata, bira tip elementa, usvaja kriterijum premrežavanja-remeshinga (procedura koja omogućava nastavak simulacije u slučajevima znatnog urušavanja početne mreže), vrši izbor solvera, način prikaza izlaznih rezultata itd. Da bise olakšale i ubrzale aktivnosti u okviru faze pretprocesiranja, savremeni software-i koriste interaktivni pristup pri unosu podataka, zatim nude mogućnost automatskog generisanja mreže i premrežavanja, izbor materijala iz baze podataka, uvoz postojećih CAD modela i dr.




*Slika 8.3 Procedura MKE simulacija [8.1]*

Većina analiza procesa deformisanja zasnovanih na MKE provodi se kao tkz. direktna analiza gde korisnik definiše kompletan set ulaznih parametara uključujući diskretizaciju geometrije, pomeranja u sistemu obradak-alat-mašina, karakteristike materijala i tribološke uslove. Direktna analiza omogućava dobijanje korisnih informacija o deformacionoj sili i utrošku energije u procesu deformisanja, kao i uvid u proces tečenja i distrubiciju napona, deformacija i temperature po zapremini tela. Na bazi ovih termo-mehanička dešavanja i vrednosti varijabilnih parametara može se oceniti postojanje i intenzitet različitih procesa i fenomena kao što su habanje, nastanak i razvoj oštećenja, formiranje tekstute, strukturne promene itd., odnosno formirati odgovarajući modeli i baze podataka vezane za ove procese. Procena ovih procesa može se izvršiti na više načina počev od jednostavnog post procesiranja rezultata MKE, pa sve preko strukturnih modela koji uzimaju u obzir evoluciju promenjivih u toku izračunavanja. Na primer, intenzitet habanja može se proceniti na osnovu veličina klizanja i kontaktnih pritiska dobijenih putem standardne MKE [8.29], ili kroz uvođenje modela mikro-mehaničkog kontakta u MKE-kod radi spajanja mehanizama trenja i habanja [8.30, 8.31].

MKE može se primeniti i za tkz. senzitivnu analizu procesa deformisanja. Senzitivna analiza ili analiza osetljivosti pokazuje koliko je osetljivo neko rešenje kada se menjaju odgovarajući parametri procesa. Osnovna postavka je da se sve promenjive osim jedne drže konstantnim, dok se vrednost one koje se ispituje menja. Dobijeni rezultati se obično porede sa referentnim vrednostima. Kada se analizira veliki broj parametara ovaj pristup postaje neefikasan zbog dugog vremena proračuna pa se zamenjuje drugim postupkom kao što je postupak direktne diferencijacije. Kod hladne obrade deformisanjem senzitivna analiza koristi se za dobijanje informacija o uticaju različitih parametra u sistemu obradak-alat-mašina na proces deformisanja [8.32, 8.33]. Ona obuhvata informacije koje govore o tome kako karakteristike materijala, tribološki uslovi, međufazni oblici, konstrukcija alata i karakteristike mašine utiču na deformacionu silu, tečenje materijala, energiju, napone, deformacije, temperaturno polje. Na osnovu njih kasnije se može proceniti dejstvo pojedinačnih faktora procesa na kvalitet proizvoda i radni vek alata.

Potreba da se MKE osim za simulacije procesa primeni i za automatsku optimizaciju prepoznata je odavno. Razvojem senzitivne analize i računara pokušaji da se razvije efikasni softver za optimizaciju procesa deformisanja je sve realističniji i veliki broj obećavajućih rezultata je postignut po pitanju optimizacije međufaznih oblika, broja faza obrade i prednaprezanja alata u cilju smanjenja elastičnih deformacija [8.34, 8.35] . Međutim optimizacija procesa deformisanja je mnogo kompleksniji i teži zadatak nego što je direktna analiza i njen uspeh zavisi od dva glavna aspekta. Prvo, kako formulisati optimizacioni problem kvantitativno, i drugo kako rešiti optimizacioni problem primenom raspoloživih algoritama i računarskih kapaciteta u prihvatljivom vremenskom roku. Optimizacija procesa obično se sprovodi primenom iteracionih postupaka i direktne MKE, gde se modelovani parametri automatski koriguju sve dok se ne dobije zadovoljavajuće rešenje za funkciju cilja u okviru zadatih kriterijuma. Međutim, optimizacija procesa deformisanja može se sprovesti i putem inverzne analize. Kod obrade deformisanjem inverzna analiza se koristi u konjukciji sa eksperimentalnim rezultatima ili industrijskim podacima u cilju procene karakteristika materijala, triboloških uslova i termo-mehaničkih dešavanja, tj. parametara procesa koji su kod direktnog metoda korišćeni kao početni uslovi [8.36, 8.37]. Kod inverznog postupka, kreće se od pretpostavljenih vrednosti nepoznatih parametara istraživanog modela, a onda se pristupa njihovoj kalibraciji kroz iteraciju sve dok razlika između stvarnih (merenih) i numeričkih rezultata ne bude minimalna. Drugim rečima indirektni pristup omogućava evaluaciju nepoznatih parametara procesa na osnovu indirektnih merenja i veoma je podesan u slučajevima kada se merenja, zbog uslova procesa, ne mogu izvršiti ili kada je naponsko, deformaciono ili temperaturno polje promenljivo.

Direktna, senzitivna i indirektna analiza, kao i postupak optimizacije mogu se sprovesti na različitim nivoima. Najveći broj analiza realizuje se na makro nivou (proračun naponsko-deformacionog stanja unutar radnog predmeta, opterećenja alata, temperaturnog polja itd). Međutim MKE analiza procesa deformisanja sve više se sprovodi i na mikro nivou. Tako na primer lokalni naponi u alatu određeni su na bazi distribucije karbida u martenzitno-austenitnoj osnovi [8.38]. Na sličan način mogu se analizirati i kontaktni uslovi uzimanjem u obzir mikro-hrapavosti površina i drugih fenomena koji se odvijaju na tom nivou.