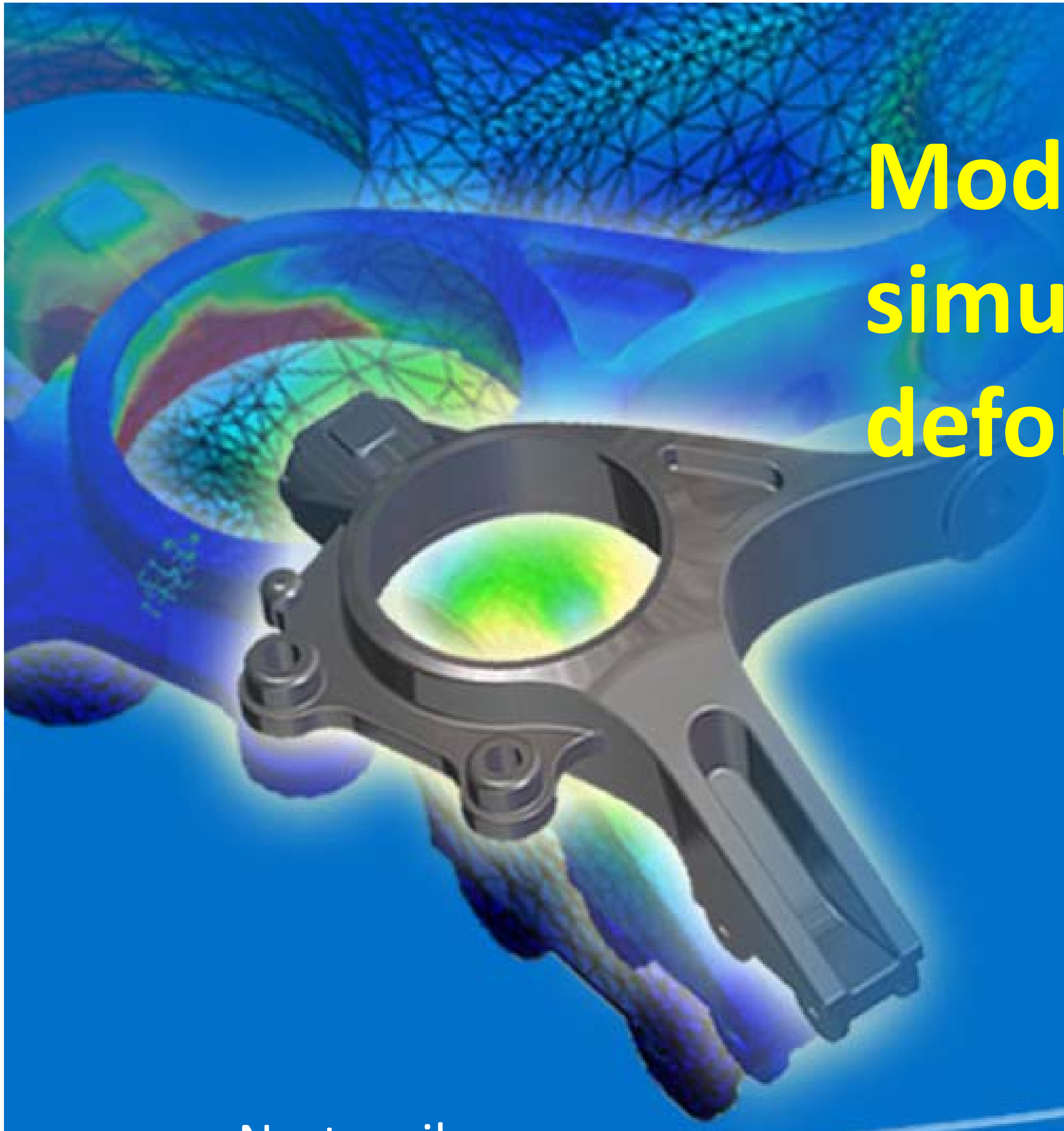
Modelovanje i simulacija procesa deformisanja



Nastavnik:
Doc. dr Mladomir Milutinović

Asistent:
Mr Dejan Movrin

MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

Matematičko modelovanje procesa deformisanja je postupak matematičkog opisivanja procesa deformisanja. Sa jedne strane, ovaj opis mora biti relativno jednostavan, a sa druge strane i dovoljno tačan, da bi odgovorio svojoj nameni koja je definisana od strane kreatora modela.
Matematički model se obično sastoji od skupa jednačina kojima treba da su opisane sve važnije pojave ili procesi značajni za postavljeni problem. Karakteristike sredine ili objekata izražene su kroz koeficijente jednačina.
Za nalaženje rešenja formulisanog modela matematickim metodama koriste se kako ***determinističke (analitičke i numeričke)*** tako i ***heurističke metode i veštačka inteligencija.***

Klasična (analitička) matematika - osnovni cilj utvrditi pod kojim uslovima postoji rešenje nekog zadatka i koje su osobine tog rešenja.
Numeričke matematika - efektivno nalaženje rešenja sa zadatom tačnošću. Ta tačnost treba da bude nešto veća od tačnosti koju obezbeđuje matematički model, ali ne ni suviše visoka, jer se tačnost približnog rešenja i tako neće povećati s obzirom na usvojeni model.
Heurističke metode i metode „veštačke inteligencije“ - se koriste kako bi se ubrzao proces pronalaženja dovoljno dobrog rešenja, u situacijama kada je kompletno pretraživanje nepraktično. Tehnike rešavanja problema, učenja i otkrivanja koji su bazirani na iskustvu.

MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

Analitičke metode

- Metoda ravnih preseka (inženjerska metoda)
- Metoda linija klizanja
- Metoda vizioplastičnosti (teorija+exp.)
- Metoda gornje granice
- Varijaciona metoda
- Metoda deformacionog rada

Heurističke metode i metode veštačke inteligencije

- Ekspertni sistemi
- Soft computing
- Monte Carlo
- Genetski algoritam
- Evoluciono programiranje
- Neuronske mreže
- Fuzzy logic
- Simulirano kaljenje
- Tabu algoritam i dr.

Numeričke metode

- UBET
- MUBET
- Metoda Konačnih Elemenata
- Metoda Konačnih Zapremina
- Metoda Konačnih Razlika
- Metoda Graničnih Elemenata
- Metoda reziduuma

Metode strukturne analize

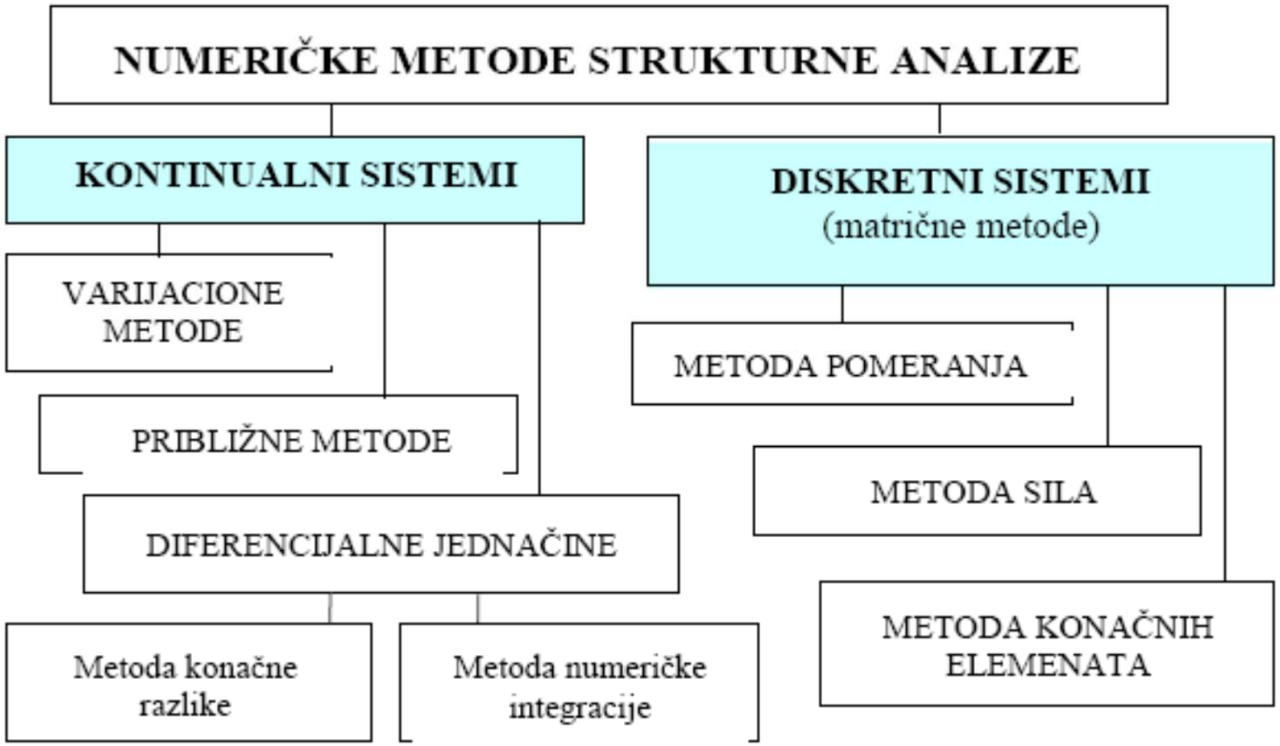
Analiticke metode:

- diferencijalne jednačine (obične i parcijalne)
- diferencijlno-integralne jednačine

Numericke metode

- kontinualni sistemi
- diskretni sistemi

Numeričke metode

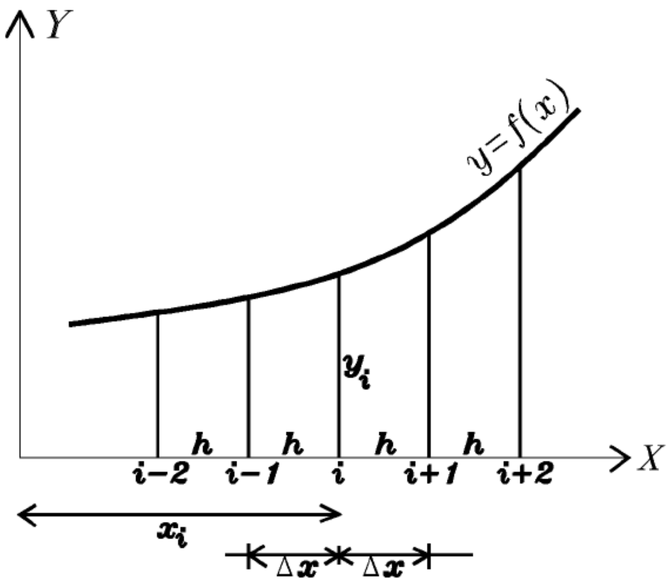


U numeričkom pristupu rešavanja pojedinih tehničkih problema najčešće se koristite neke od sledećih **numeričkih metoda:**

- **Metoda konačnih razlika (Finite Diferences Method)** predstavlja numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina na taj način što se prirast *df* funkcije *f(x)* zameni konačnom razlikom (diferencijom) *Δf* funkcije *f(x)*.
- **Metoda graničnih elemenata (Boundary Element Method)** alternativna je metodi konačnih elemenata uz neke njoj specifične karakteristike: mali broj jednačina sistema, jednostavna priprema i obrada podataka, dobra aproksimacija koncentracije naprezanja, itd.
- **Metoda konačnih zapremina (Finite Volume Method)** alternativna je metodi konačnih elemenata za analizu naprezanja i deformacija, kako čvrstih tela, tako i termoplastičnih.
- **Direktna metoda konačnih elemenata** (Direct Finite Element Method) koristi se za rešavanje relativno jednostavnih problema, npr. mašinski elementi jednostavnog oblika, statika linijskih konstrukcija i slično. Zato je ova metoda polazna osnova za širu inteipretaciju MKE, zbog svoje jednostavnosti i fizičkog značenja.
- **Varijaciona metoda konačnih elemenata** (Variational Finite Element Method) temelji se na varijacijskom principu virtualnih pomeranja i principu virtualnih naprezanja. Varijacijska metoda se jednako uspešno primenjuje za jednostavne i složene probleme. Kod postavljanja matričnih jednačina konačnog elementa više se primjenjuje varijacijska metoda nego direktna.
- **Metoda energetskog bilansa** (Energy Balance Finite Element Method) temelji se na bilansu različitih vidova energije, zbog čega ima širu primenu u termostatičkoj i termodinamičkoj analizi kontinuuma.
- **Metoda reziduuma-ostatka** (Residual Finite Element Method) temelji se na diferencijalnim jednačinama razmatranog problema. Naročitu primenu ima kod problema gde je teško formulisati funkcional ili kod problema gde funkcional ne postoji

METODA KONAČNIH RAZLIKA je numerička metoda pogodna za rešavanje raznovrsnih zadataka. Bazira se na matematičkoj diskretizaciji diferencijalnih jednačina prevodjenjem na jednačine sa konačnim razlikama. Uspešno se može primeniti na tankozidim nosačima, na problemima plastično deformabilnih konstrukcija. Efikasnost metode se smanjuje sa složenošću unutrašnjih veza posmatranog mehaničkog sistema.

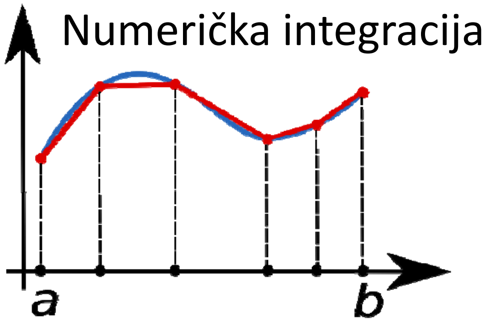
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} . \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right) - \left(\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$



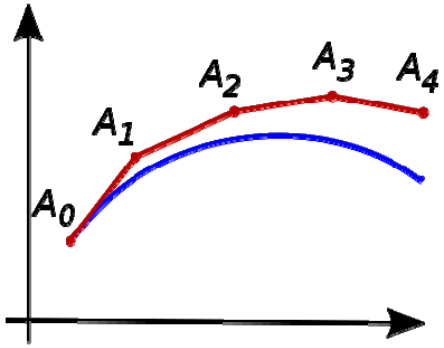
Ukoliko Δx dovoljno smanjimo, numerička aproksimacija derivacije će biti vrlo točna

- **METODA NUMERIČKOG INTEGRISANJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA** se koristi široko u mnogim zadacima. Metoda se svodi na rešavanje zadatka *Cauchy*-ja s obzirom na postojanje dobrih matematičkih procedura za integraciju sistema diferencijalnih jednačina. Za rešavanje se dosta dobro mogu upotrebiti metoda *Euler*-a, metoda *Runge-Kutta* i druge.

Eulerova metoda je iterativna metoda kojom se računa aproksimacija vrednosti $y(x_1)$ uz poznatu (običnu) diferencijalnu jednačinu oblika $\mathbf{y'=f(x,y)}$ i početni uslov $\mathbf{y(x_0)=y_0}$ (tzv "*Cauchyjev problem*").
Metoda se provodi tako da se početni interval, $[x_0,x_1]$ (dakle, interval od tačke koja je zadana početnim uslovom, do tačke u kojoj želimo izračunati vrednost funkcije) podeli na n jednakih delova.
Dužinu $h=(x_{1,0})/n$ zovemo *korakom* metode. Zadanom diferencijalnom jednačinom oblika $y'=f(x,y)$ dato je tzv. *polje smerova*, odnosno, svakoj tački ravni pomoću diferencijalne jednačine možemo pridružiti vrednost nagiba tangente. Upravo će nam tangenta u svakoj tački predstavljati linearnu aproksimaciju rešenja diferencijalne jednadžbe. Pomeranjem za vrednost koraka h po x-osi dolazimo do sledeće tačke iterativne metode (na slici označene redom s A_0, A_1, ...). Postupak ponavljamo (iteriramo) dok vrednost na x-osi ne dosegne x_1. Provedemo li računski opisan postupak dobivamo iterativni algoritam.



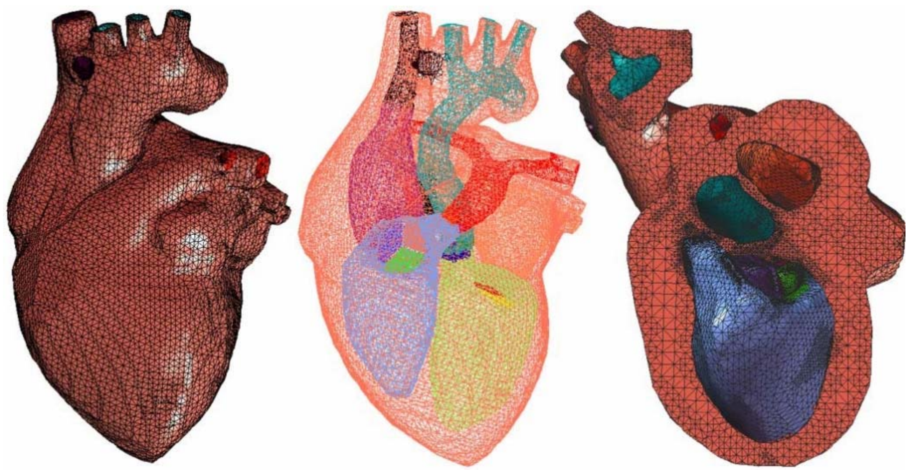
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\cdot(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n)$$

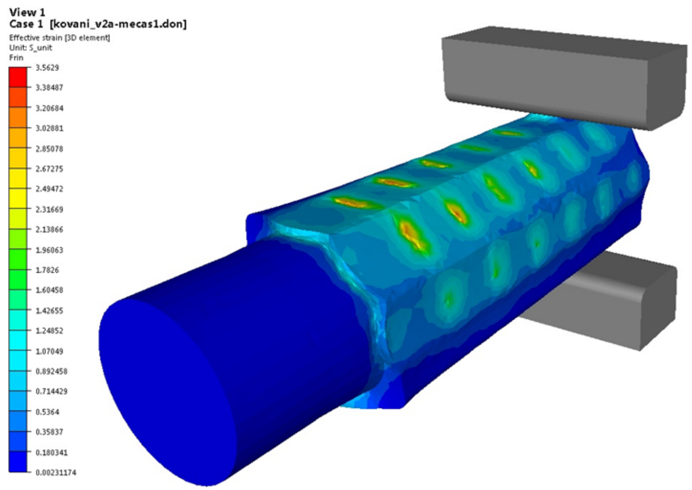


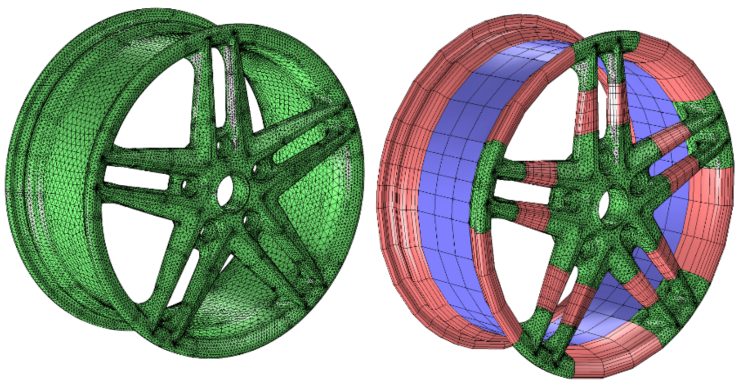
$$x_{i+1}=x_i+h$$
$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i)$$

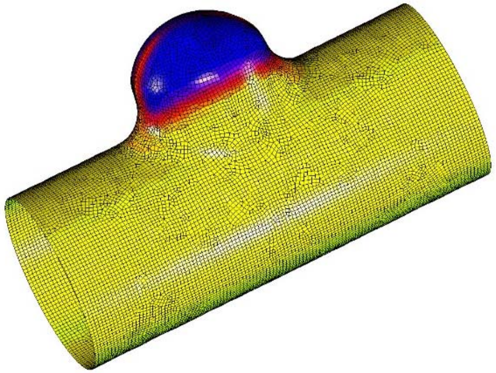
- **METODA GRANIČNIH ELEMENATA** je specifična metoda prelaza iz sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina i zadatih graničnih uslova ka njihovoj integralnoj analogiji na granici oblasti koju posmatramo. Postupak se sastoji u diskretizovanju granične oblasti strukture graničnim elementima, primenom različitih vrsta aproksimacija geometrije granica i graničnih funkcija. Iz integralnih odnosa, diskretnom analogijom, formira se sistem algebarskih jednačina. Rešavanjem sistema dolazi se do traženih veličina na granicama oblasti.

METODA KONAČNIH ELEMENATA



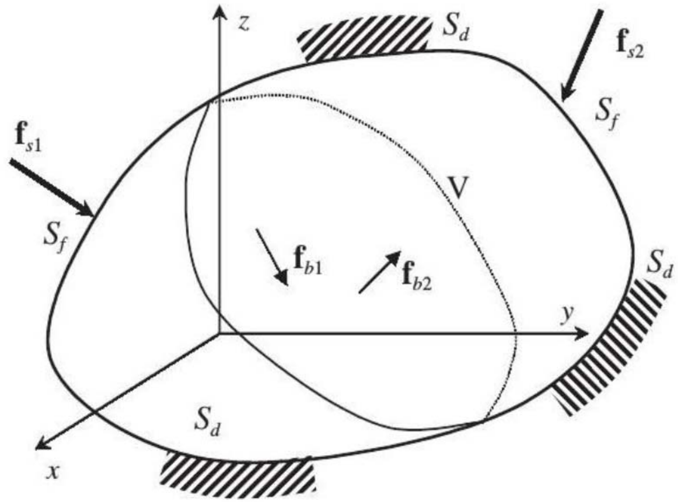






Granični ili početni problem deformabilnog 3D tela

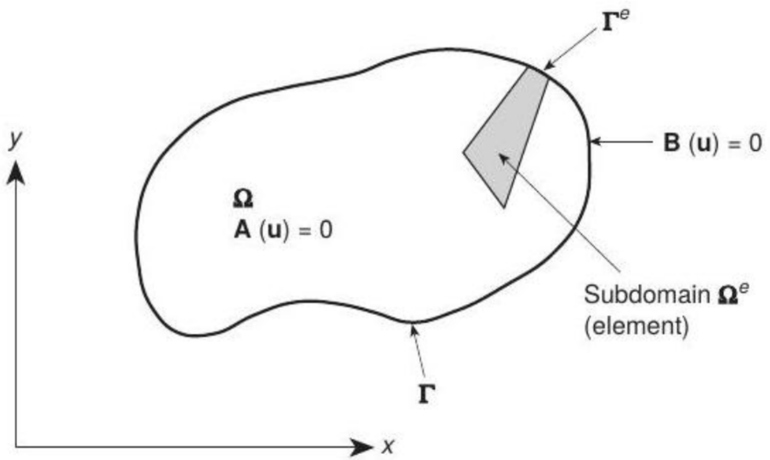
- **Granicni ili početni problem** deformabilnog tela posmatra stanje napona i deformacija tela usled datih spoljašnjih uticaja
- Ukoliko su spoljašnji uticaji značajnije zavisni od vremena, problem je dinamičke prirode i opisan je (nacelno) odgovarajucim diferencijalnim jednacinama kretanja
- Ako su vremenske promene opterecenja i odgovora tela zanemarljive, problem je staticke prirode i definisan je odgovarajucim diferencijalnim jednacinama ravnoteže
- Osim diferencijalnih jednačina kretanja ili ravnoteže, moraju da budu definisani i odgovarajuci granicni i pocetni uslovi (za dinamicki problem)

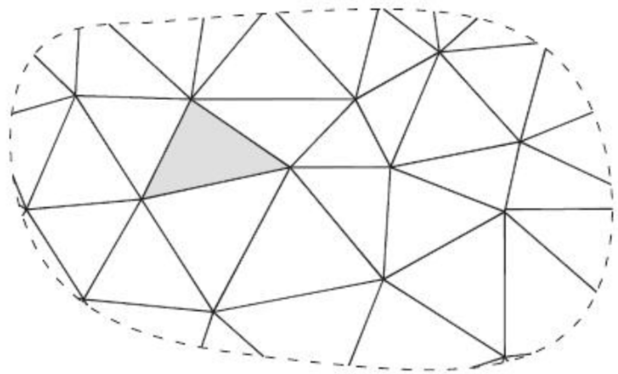


Diskretizacija domena i diferencijalnih jednacina

Posmatrani problem Primenjene mehanike (Mehanike čvrstog tela) definisan je odgovarajucim granicnim problemom, što znaci da je poznato sledece:
- domen definisanosti problema Ω i granica domena Γ
- diferencijalne jednacine problema u oblasti Ω: $A(u) = 0$
- zadati granicni uslovi na konturi domena Γ: $\mathbf{B(u) = 0}$

Domen definisanosti problema (1D, 2D ili 3D) prikazan je u Dekartovim koordinatama x i osnovna nepoznata velicina je pomeranje tačaka čvrstog tela *u(x)*

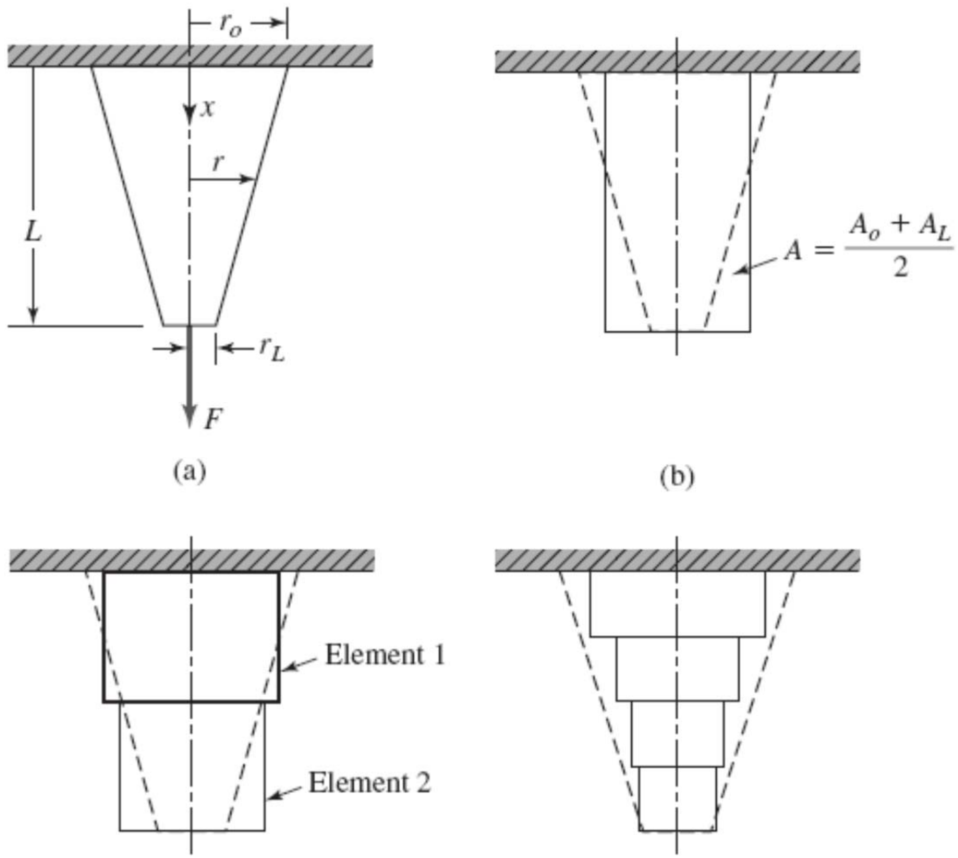




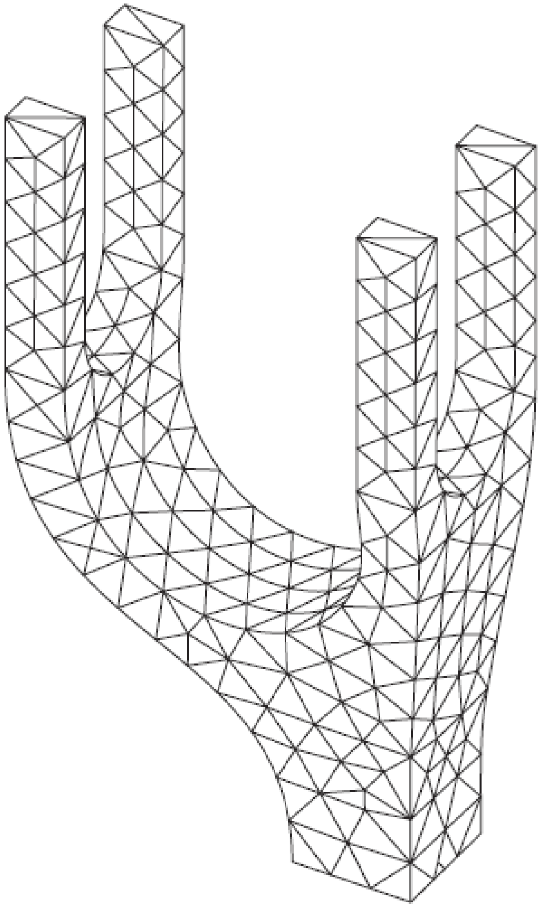
OSNOVE MKE

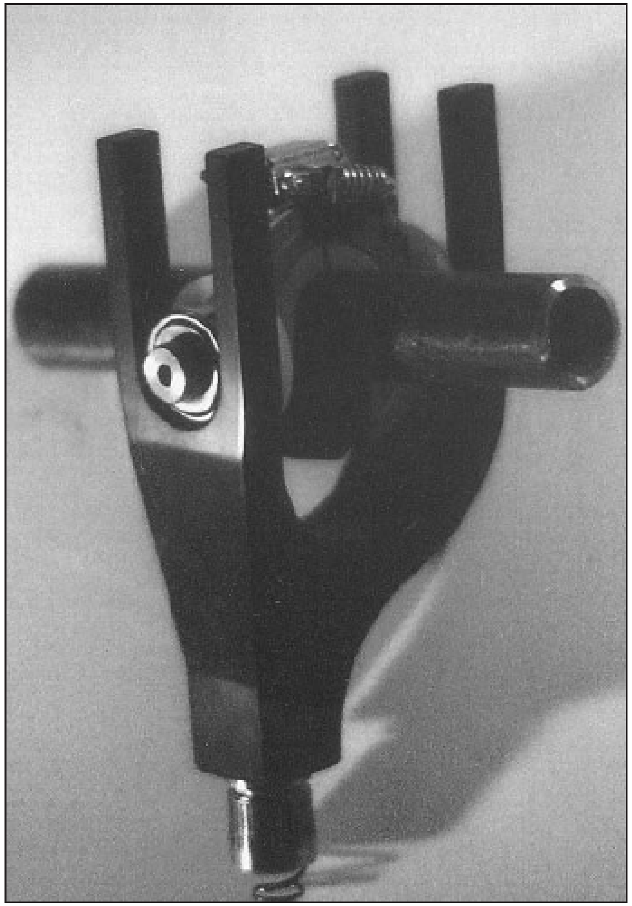
- MKE je najviše primenjivan numericki postupak za približno rešavanje graničnih i početnih problema
- Metoda konačnih elemenata spada u metode diskretne analize. Za razliku od ostalih numeričkih metoda, koje se zasnivaju na matematičkoj diskretizaciji jednačina graničnih problema, MKE se zasniva na fizičkoj diskretizaciji razmatranog područja. Umesto elementa diferencijalno malih dimenzija, osnovu za sva proučavanja predstavlja deo područja konačnih dimenzija, manje područje ili **konačni element**. Zbog toga su osnovne jednačine pomoću kojih se opisuje stanje u pojedinim elementima, a pomoću kojih se formuliše i problem u celini, umesto diferencijalnih ili integralnih, **obične algebarske.**
- Sa stajališta fizičke interpretacije, to znači da se razmatrano područje, kao kontinuum sa beskonačno mnogo stepeni slobode, zamenjuje diskretnim modelom međusobno povezanih konačnih elemenata, sa **konačnim brojem stepeni slobode**. S obzirom na to da je broj diskretnih modela za jedan granični problem neograničeno veliki, osnovni zadatak je da se izabere onaj model koji najbolje aproksimira odgovarajući granični problem.

Osnove MKE - nastavak



Osnove MKE-nastavak





Razvoj MKE

- Ideja stara 2000 godina
  - Arhimed-broj π, zapremina piramida, površina sfrere)
- Razvoj počeo polovinom XX veka
  - Inžinjerski pristup (disketizacija složenih konstrukcija štapovima-linijski nosači)
  - Matematički pristup (diskretni modeli i variacioni postupak)

Razvoj MKE- nastavak

- Koncept metode je definisao 1941. *Hrenikoff*.
- Godine 1956 istraživači *Claugh*, *Martin*, *Turner* i *Torr* računarom su rešili zadatak ravanskog naponskog stanja krila aviona "BOEING", primenom trougaonih konačnih elemenata. Tada je na predlog američkog istraživača *Claugh*-a definisano današnje ime metode: "*the finite element method*", skraćeno FEM.
- Značajan doprinos širenju ideja i koncepta metode imala je štampa prve monografije autora *Zienkiewicz*-a i *Cheng*a 1967
- Sedamdesetih godina istraživač *Oden* značajno uopštava metodu, uvodeći u nju trodimenzionalnost, nelinearnost, dinamiku struktura, talasno prostiranje, uticaj fluida i optimalnost struktura

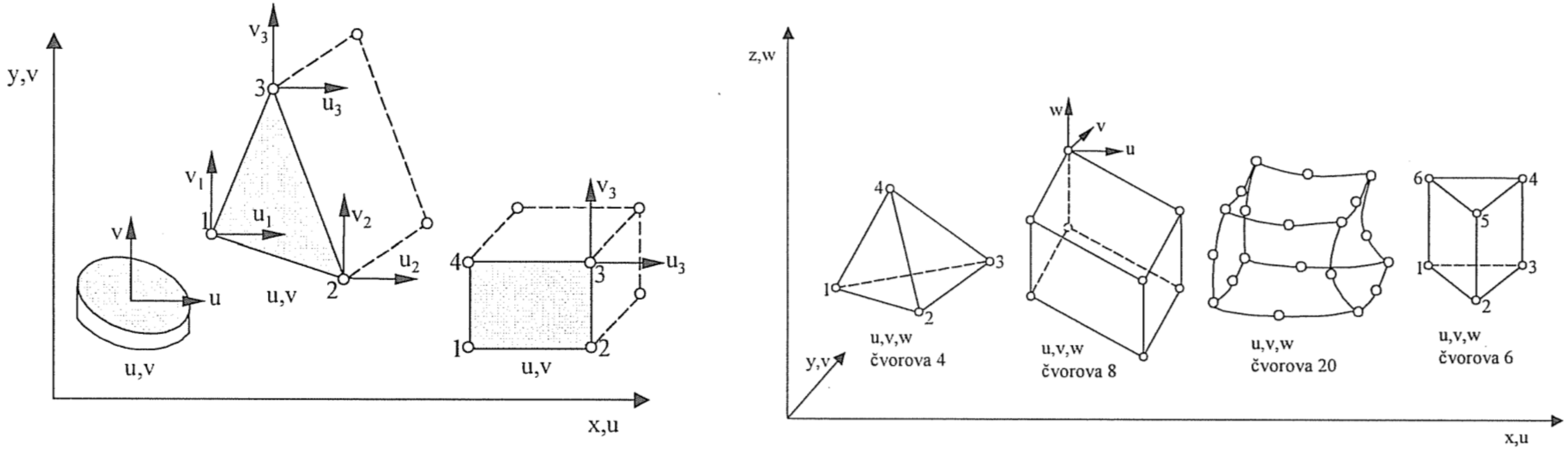
Razvoj MKE- nastavak

- 80-tih MKE počinje se primenjivati i u oblasti plastičnosti (jednostavni procesi deformisanja - sabijanje valjka i istosmerno istiskivanje – kruto plastičan materijal)
- 90-tih, uvođenjem termo-mehaničke analize, brzine deformisanja, elasto-plastičnih i elasto-viskoplastičnih modela, napretkom u modelovanju kontaktnih i graničnih uslova, razvoju efikasnih algoritama (solvera) za rešavanje i dr. stvorene su pretpostavke za punu primenu MKE u oblasti obrade deformisanjem.
- Danas na tržištu postoji veliki broj komercijalnih softwera na bazi MKE koji se koriste za simulacije procesa deformisanja (Abaqus, QForm, DEFORM, Simufact.Forming, Pam-Stamp, AutoForm

Suština aproksimacije kontinuma po MKE

- MKE se zasniva na diskretizaciji kontinuuma – zamena kontinualnog sistema ili procesa diskretnim, tj. aproksimacija kontinuuma konačnim brojem elemenata
- Posmatrani domen kontinuuma se deli pomoću zamišljenih linija ili površi na određeni broj poddomena konačnih dimenzija koji se nazivaju **konačnim elementima** i zajedno čine mrežu konačnih elemenata
- Konačni elementi su međusobno povezani u konačnom broju tačaka koje se nalaze na konturi elemenata i nazivaju se **čvorovi**
- Stanje promenljive (npr. polje pomeranja, deformacija, neprezanje, temperatura) u svakom konačnom elementu se opisuje pomoću **interpolacionih funkcija** (ili funkcija oblika)
- Parametri u čvorovima su osnovne nepoznate veličine u MKE
- Interpolacione funkcije su unapred zadate funkcije za jedan tip KE i predstavljaju vezu između vrednosti promenljive polja u bilo kojoj tački KE i vrednosti promenljive polja u čvorovima

Suština aproksimacije kontinuma po MKE



- Za svaku čvornu tačku, gde se spajaju elementi, postavljaju se jednačine koje definišu vezu naprezanja i deformacija.
- Preko čvornih tačaka na spoljnim konturama uvode se spoljna opterećenja i uključuju u sistem jednačina elastičnosti, naprezanja i deformacija.
- Rešavanjem ovih sistema jednačina dobiju se pomaci, odnosno deformacije i naprezanja u svim čvornim tačkama.

Algoritamski koncept MKE

Korak po korak

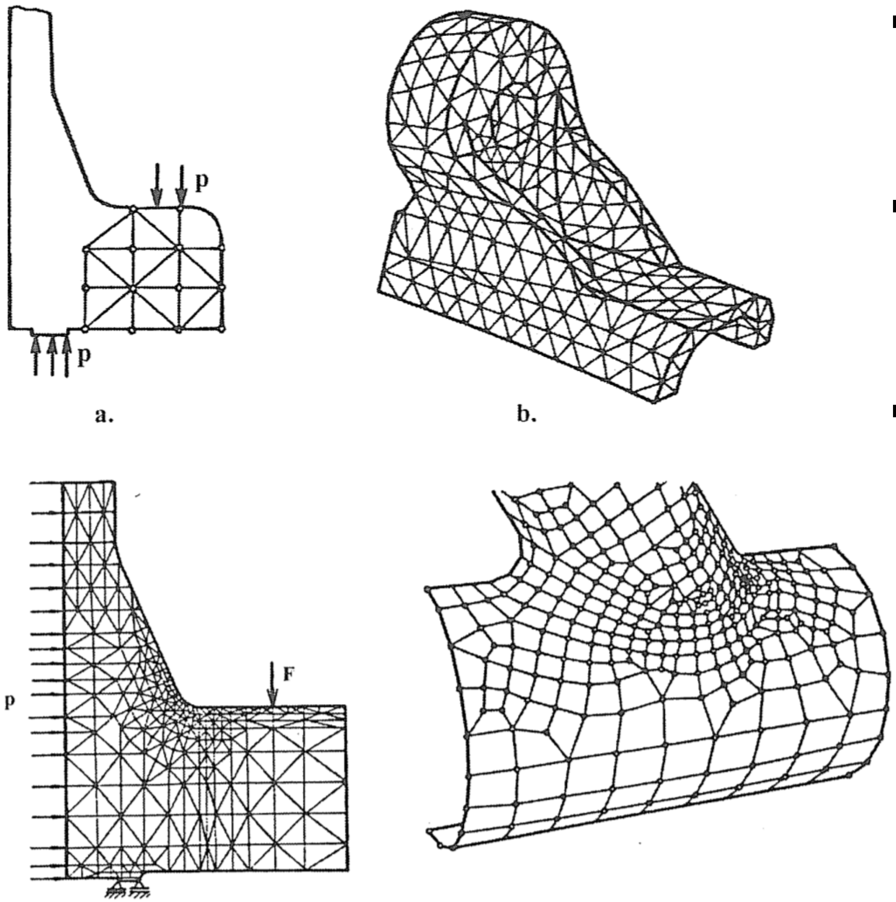
- Diskretizacija kontinuuma
- Izbor interpolacionih funkcija
- Računanje karakteristika elemenata
- Formiranje jednačina za mrežu konačnih elemenata
- Rešavanje sistema jednačina
- Proračun potrebnih uticaja

KRITERIJUMI DISKRETIZACIJE

1. **Kriterijum broja stepeni slobode:** Što manji broj stepeni slobode i što kvalitetnije interpolacione funkcije. Umanjuje numerički obim problema i smanjuje potrebne hardverske resurse.
2. **Kriterijum manjih aproksimacija:** Manje odstupanje od tačne geometrije kod modeliranja. Ovaj zahtev uvećava broj stepeni slobode kretanja
3. **Kriterijum spoljašnjeg oblika:** Izbor konačnog elementa strukture može se izvršiti na osnovu sličnosti njegove geometrijske forme sa formom pravilnih delova objekta.
4. **Kriterijum poznavanja unutrašnje distribucije komponentnih napona članova kontinuuma:**

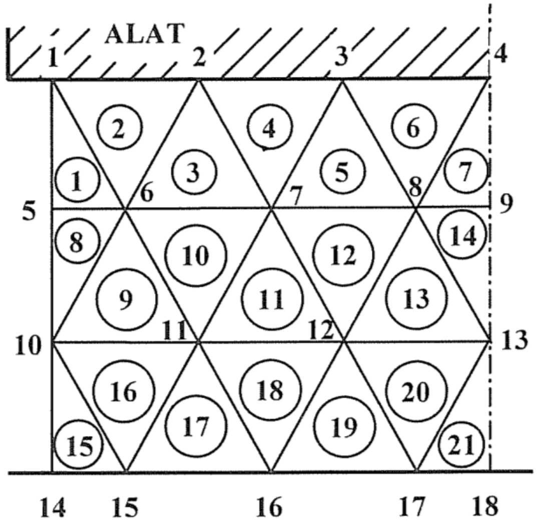
   Zasniva se na poznavanju osnovnih tipova naponskih distribucija kod ploče, ljuske, membrane, solida, grede, štapa. Kako unapred nije tačno poznata distribucija napona, često se nakon analize ispituje ispravnost izbora konačnih elemenata. To podrazumeva kontrolu nivoa i vrste komponentnih deformacija. Na taj način se proverava da li je izabran element "radio" po svojoj teoriji ili ne. Kada uslovi to dozvole, vrši se i eksperimentalna analiza. Na bazi toga se može reći da je modeliranje u teoriji konačnih elemenata i iskustvena kategorija.
5. **Kriterijum simetričnosti:** U slučaju centričnog ili simetričnog spoljašnjeg opterećenja, moguće je izvršiti modeliranje polovine, četvrtine ili dela konstrukcije, čime se problem racionalno opisuje manjim brojem stepeni slobode. To je slučaj sa cisternama, spojnicama, diskovima. Uticaj ostalih delova konstrukcije definiše se posredstvom graničnih uslova elastičnih pomeranja čvorova

Diskretizacija kontinuma

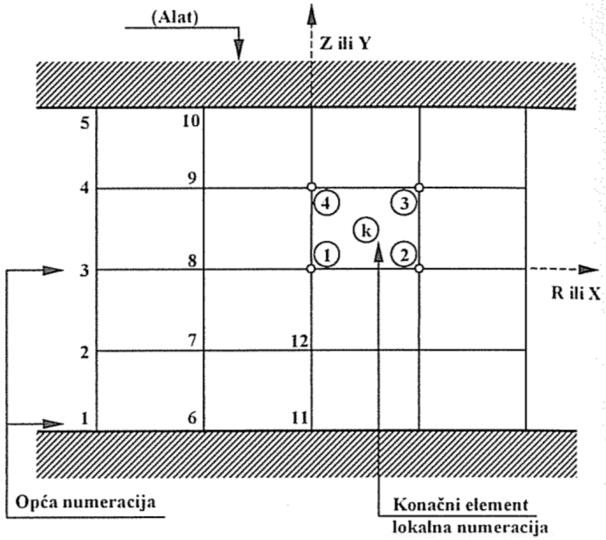


- Na mestima gde se očekuje povećanje naprezanja, tj. koncentracija naprezanja, mreža je sitnija i obratno.
- Ako je mreža konačnih elemenata sitnija, manja je mogućnost da između dve tačke ostane prostor gde je naprezanje ekstremno veliko.
- Veći broj elemenata povećava opseg izračunavanja i vreme rada računara.

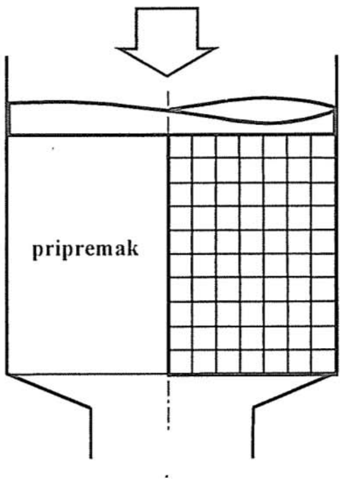
Diskretizacija kontinuma

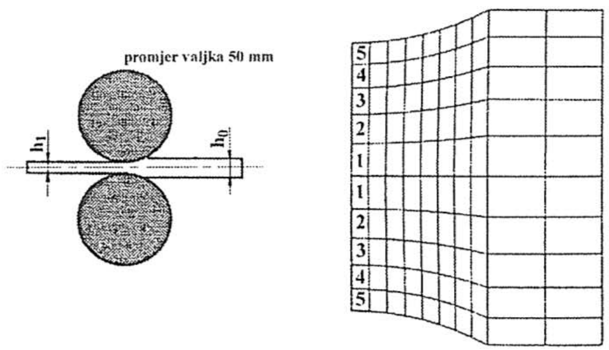


a.



a.





c.

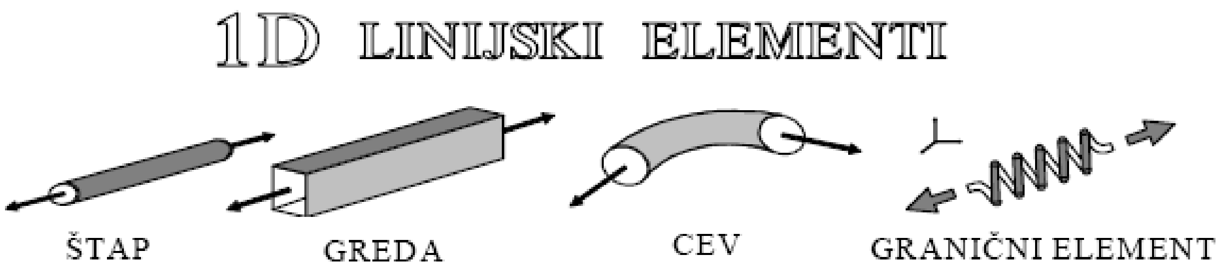
TIPOVI KONAČNIH ELEMENATA

- Izbor tipa konačnog elementa je jedan od najvažnijih koraka u primeni metoda konačnih elemenata. Pravilan izbor je veoma važan za dobijanje tačnih rezultata. Osnovne osobine konačnih elemenata su:
  - oblik
  - broj i vrsta čvorova
  - broj i vrsta stepeni slobode u pojedinim čvorovima i
  - vrsta interpolacionih funkcija.

- Bez bilo kog od ovih parametara, konačni element nije potpuno definisan. S obzirom na njihov oblik, elementi mogu biti sa pravolinijskim i sa krivolinijskim konturama. Bitna je podela na:
  - linijske
  - ravanske i
  - prostorne

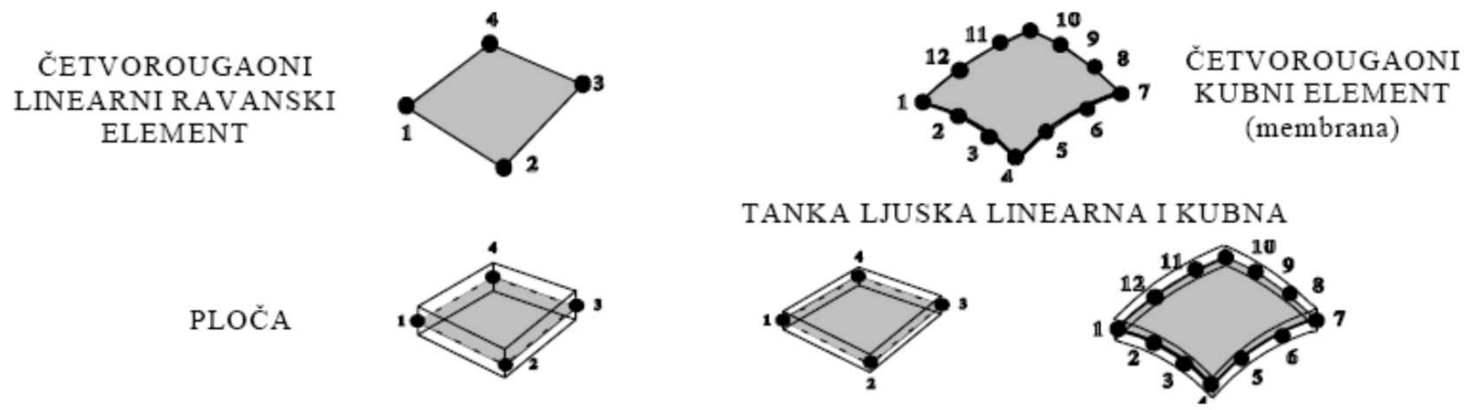
Linijski konačni elementi

- Linijski konačni element je deo prave ili krive linije. Kod ovog tipa elementa jedina dimenzija koja se razmatra je dužina.
  - štapovi – SPARS
  - grede – BEAMS



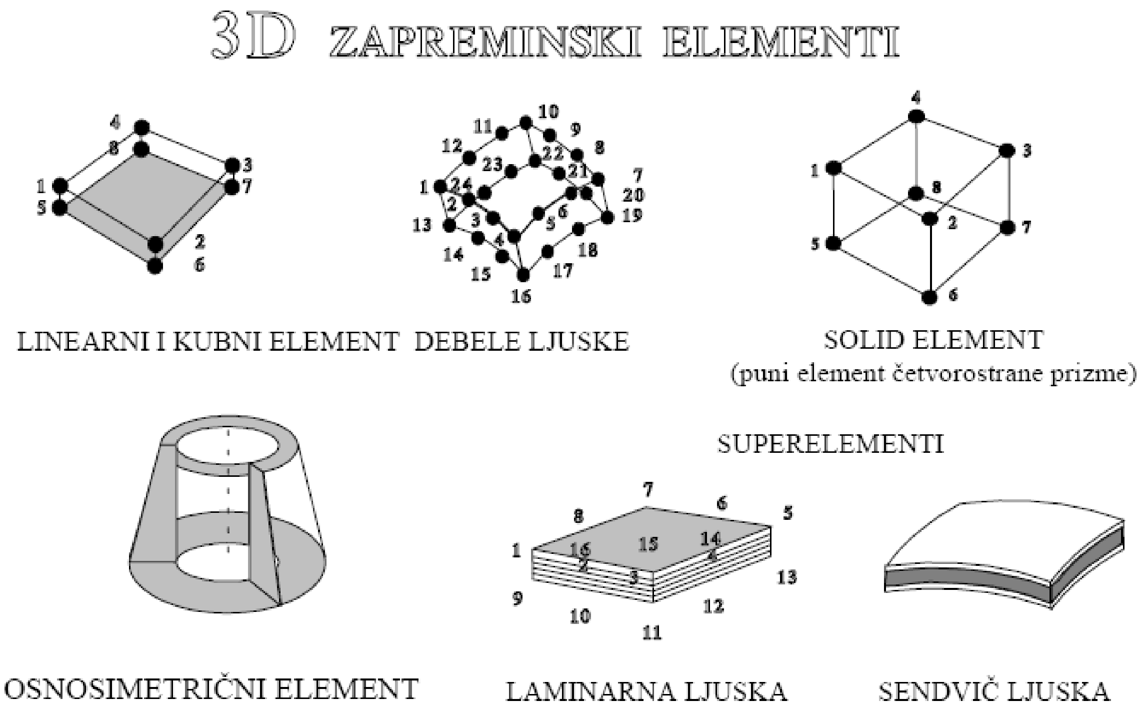
Ravanski konačni elementi

- Koriste se za analizu problema koji se mogu posmatrati kao dvodimenzionalni (ravno stanje deformacije i napona, osnosimetrično stanje deformacije).
- Najčešće su četvorougaonog ili trougaonog oblika



Prostorni konačni elementi

Koriste se za analizu trodimenzionalnih problema i obično su oblika tetraedra ili prizme. Kao i ravanski, mogu biti pravolinijski i krivolinijski



Osnovni vidovi MKE

(prema načinu formulisana osnovnih jednačina)

1. Direktna metoda
2. Varijaciona metoda
   - princip o minimumu potencijalne energije
     (metoda deformacija)
   - princip o minimumu komplementarne energije
     (metoda sila)
   - Reissner-ov varijacioni princip (mešovita metoda)
3. Metoda reziduuma
4. Metoda energetskog balansa

Direktna metoda

- Analogna metodi deformacije u proračunu linijskih nosača.
- Koristi se kod relativno jednostavnih problema, a pogodna je zbog jasnog geometrijsko-mehaničkog značenja pojedinih koraka aproksimacije.

Direktna metoda - Formulacija na bazi pomeranja

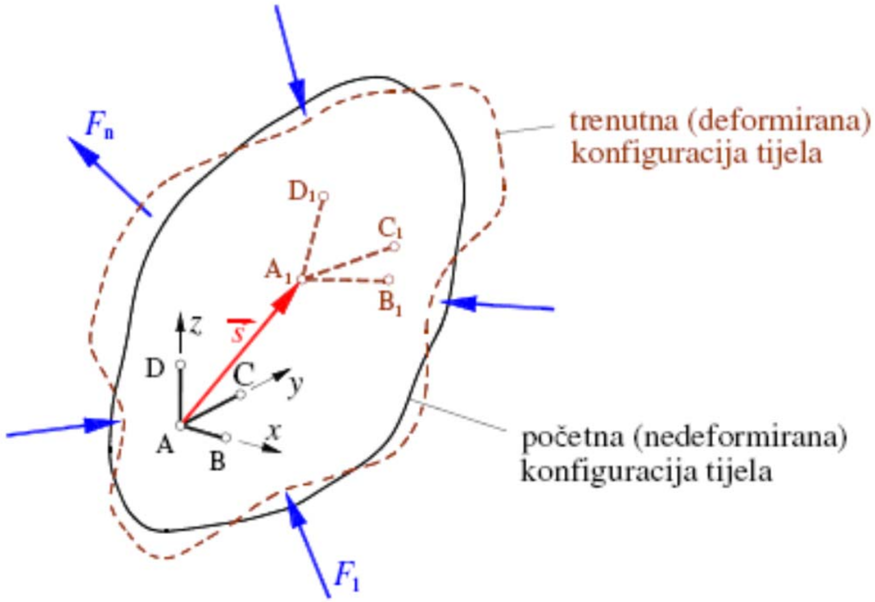
- Vecina pristupa u MKE u Primenjenoj mehanici zasnovana je na **polju pomeranja** kao osnovnim nepoznatim
- Za neke od konacnih elemenata relacije mogu da se formulišu direktnim putem, kao što su linijski konacni elementi za rešetkaste i pune štapove, u ravni ili u prostoru
- Za površinske ili prostorne konačne elemente polazi se od osnovnih relacija u mehanici, odn. u naponsko-deformacijskoj analizi i teoriji elastičnosti:
  - veza između napona i deformacija
  - veza između deformacija i pomeranja
  - uslova ravnoteže (ili diferencijalnih jednačina kretanja)
  - graničnih i početnih uslova
  - odgovarajučih pricipa mehanike

Pomeranja tačaka tela

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$$

$$\vec{s} = (x,y,z) = \{s\} = \begin{Bmatrix} u\,(x,y,z) \\ v\,(x,y,z \\ w\,(x,y,z \end{Bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$



INTERPOLACIONE FUNKCIJE

- Funkcije pomoću kojih se predstavlja polje promenljivih u elementu, nazivaju se **interpolacione funkcije**, **funkcije oblika ili aproksimativne funkcije.**
- Interpolacija znaci formiranje kontinualnih funkcija koje zadovoljavaju propisane uslove u konačnom broju tačaka
- U MKE konačan broj tačaka su čvorne tacke konacnih elemenata, a propisani uslovi su vrednosti nepoznatih, a eventualno i njihovih izvoda, u čvornim tackama
- čvorne vrednosti mogu da budu i tacne (što obicno nisu u potpunosti), ali interpolacija pretstavlja približnu raspodelu nepoznatih unutar posmatrane oblasti (unutar konacnog elementa)
- Interpolaciona funkcija se pretpostavlja za svaki konačni element, pri čemu ona mora zadovoljiti odgovarajuće granične uslove duž granica elementa
- Pomoću interpolacionih funkcija se uspostavlja neposredna veza između vrednosti funkcije u bilo kojoj tački elementa i osnovnih nepoznatih parametara u čvorovima.
- Vrednost funkcije u nekoj tački se interpolira između njenih vrednosti u čvorovima.
- Pomoću ovih funkcija određena je samo kvalitativno promena funkcije u elementu, što znači da je definisan samo njen oblik dok je intenzitet te promene određen vrednostima parametara u čvorovima.
- Od izbora interpolacionih funkcija zavisi ispunjenje kontinuiteta između pojedinih elemenata.
- U MKE se uglavnom koriste polinomi kao interpolacione funkcije i to: **Lagrange-ovi polinomi, Serendipity funkcije i Hermite-ovi polinomi.**

INTERPOLACIONE FUNKCIJE

Lagrange-ov polinom

$$P(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x^2 \cdot y^2 + \ldots$$

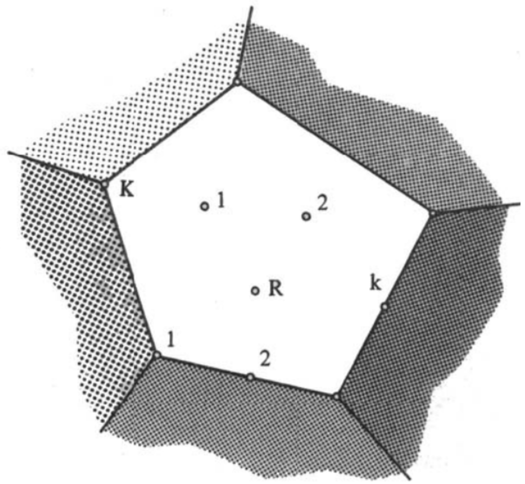
Njihovo rešenje konvergira tačnom rešenju kada polinom ima beskonačan red. Kvalitetna interpolaciona funkcija zahteva onaj stepen polinoma koliki je broj nezavisno promenljivih u elementu. Sa druge strane, visok stepen polinoma je nepodesan, zbog poteškoća eliminacija unutrašnjih članova, pa se primenjuju samo za odredjene tipove konačnih elemenata.

Serendipity funkcije i Hermite-ovi polinomi

Serendipity funkcije su funkcije čvornih tačaka konture. Njihove vrednosti su 1.0 u čvorovima i 0.0 izvan čvorova. Hermitovi polinomi su polinomi višeg stepena sa osobinama dobrog kontinuiteta na granicama izmedju elemenata. Koeficijenti ovih funkcija se određuju iz uslova kompatibilnosti i uslova statičke ravnoteže.

Serendipity funkcije su tako oblikovane da direktno povezuju pomeranja u elementu sa pomeranjima u čvorovima što eliminiše potrebu izračunavanja njihovih inverznih matrica i značajno ubrzava postupak. Koriste se za preciznije opisivanje graničnih uslova.

Interpolacione funkcije - nastavak



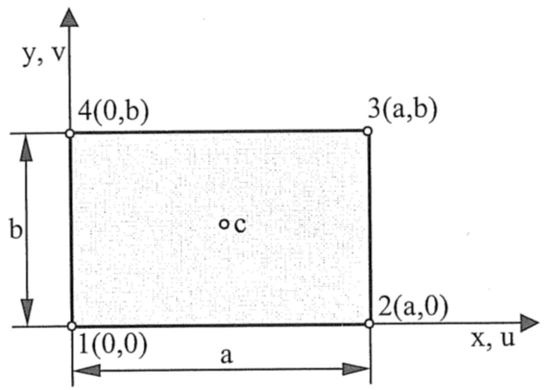
$$\{q_k\} = [u, v] \quad (k = 1, 2 \ldots . k)$$

$$\{q_k\} = [u, v, w]$$

$$\{q\} = [q_1, q_2, q_3, \ldots . q_k]$$

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy$$



$$\{u\} = [A]\{\alpha\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$$

{u}- vektor pomaka unutar konačnog elementa
α_i – koeficijenti čiji je broj jednak broju stepeni slobode elementa $\{\alpha\}=[\alpha_1,\ldots \alpha_4, \beta_1,\ldots \beta_4]$

$$\{q_k\} = [u_1, v_1 \ldots\ldots u_4, v_4]$$

Interpolacione funkcije - nastavak

Veza između pomaka u čvorovima i koeficijenata ima oblik:

$$\boxed{\{q\}=[C]\{\alpha\}} \tag{6.11}$$

gdje je:

$$[C]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

ili koeficijenti α_i:

$$[\alpha]=[C^{-1}]\{q\}, \quad det\,C\neq 0. \tag{6.13}$$

Uvrštavajući izraz (6.13) u izraz (6.7), uspostavlja se veza između pomaka u elementu i pomaka u čvorovima elementa, tj.

$$\boxed{\{u\}=[A][C^{-1}]\{q\}=[A_q]\{q\},} \tag{6.14}$$

$$[A_q]=\begin{bmatrix} \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} \end{bmatrix}$$

Interpolacione funkcije - nastavak

$$\phi(x,y,z) = N_k(x,y,z)\cdot\phi^k = [N_1, N_2 \ldots N_k \ldots N_n]\begin{bmatrix}\phi^1\\ \phi^2\\ \vdots\\ \phi^k\\ \vdots\\ \phi^n\end{bmatrix}$$

$N_k(x,y,z)$ - interpolaciona funkcija (matrica) koja odgovara čvoru k,
ϕ^k - vrednost funkcije u čvoru (k).
ϕ (x,y,z) – bilo koja skalarna funkcija komponenta pomaka , izvodi pomaka, ili neka vektorska ili tenzorska veličina

$$\{u\} = [N]\,\{q\}$$

[N] – matrica interpolacijskih funkcija
{u}- pomeranja unutar elementa
{q}- pomeranja čvorova elementa

Osnovni vidovi MKE

(u zavisnosti od izbora nepoznatih u čvorovima)

- Metoda deformacija (nepoznate su kinematske veličine - parametri pomeranja u čvorovima)
- Metoda sila (nepoznate su statičke veličine-sile i naponi u čvorovima)
- Hibridna ili mešovita metoda (nepoznate su kinematske i statičke veličine u čvorovima

Direktna metoda - Matrica krutosti

Prema teoriji elastičnosti (Košijeve jednačine) veza između deformacija tačaka unutar elementa **ε** i pomeranja **u** glasi:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\}$$

L - matrica diferencijalnih operatora

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{q\} = [B]\{q\}$$

$$\{u\} = [N]\{q\}$$

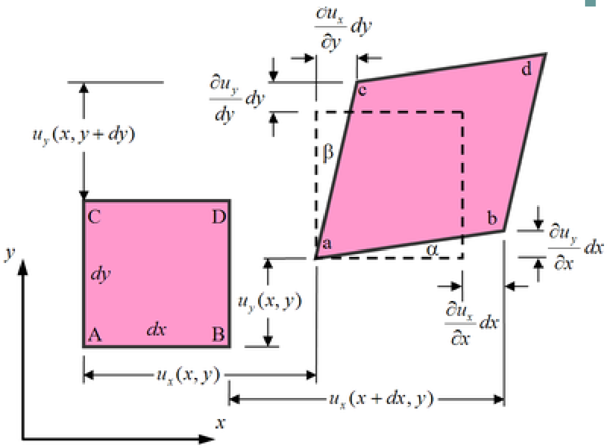
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

[B] - matrica operator koja povezuje deformacije unutar elementa i pomeranja čvorova elemenata

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}.$$



Direktna metoda - Matrica krutosti

Veza između napona $\boldsymbol{\sigma}$ i deformacija unutar elemenata $\boldsymbol{\varepsilon}$ (generalizovani Hooke-ov zakon), odnosno pomeranja čvornih tačaka:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \qquad \{\varepsilon\} = [E]^{-1}\{\sigma\} = [C]\{\sigma\}$$

$$\{\sigma\} = [E][B]\{q\} = [S]\{q\}$$

[S] - matrica operator koji opisuje vezu između napona unutar elementa i pomeranja čvorova elemenata.
[E] - matrica elastičnosti
[C] – matrica fleksibilnosti

$$[E] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ s & & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \\ & i & & e_{44} & e_{45} & e_{46} \\ & & m & & e_{55} & e_{56} \\ & & & & & e_{66} \end{bmatrix}$$

Direktna metoda - Matrica krutosti

Kada se radi o homogenim izotropnim elastičnim materijalima i toplinskim utjecajima, matrica elastičnosti $[E]$ može se prikazati s Lameovim koeficijentima, λ i μ:

$$[E]=\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simetrično} & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

ili pomoću koeficijenta Younga i Poissona:

$$[E]=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & \text{simetrično} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \tag{6.30}$$

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu=G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

E - modul elastičnosti

ν – Poason-ov koeficijent

Direktna metoda - Matrica krutosti

Generalisane sile kao koncentrisane sile u čvorovima elemenata, koje su ekvivalentne komponentnim naponima duž kontura elemenata, mogu se prikazati u sledećem obliku:

$$\{F\} = [T]\{\sigma\}$$

[T] - pravougaona matrica sa n vrsta i m kolona (m- broj komponenti u vektoru napona) i predstavlja vezu generisanih sila i napona, odnosno definiše uslove ravnoteže

$$\{F\} = [T][S]\{q\} = [K]\{q\}$$

[K] - ***MATRICA KRUTOSTI ELEMENTA***

[K]= [T] [S] = [T] [E] [B] = [T] [E] [L] [N]

Poznavanjem matrice krutosti nepoznata pomeranja čvorova određuju se iz jednačine:

$$\{q\} = [K]^{-1}\{F\}$$

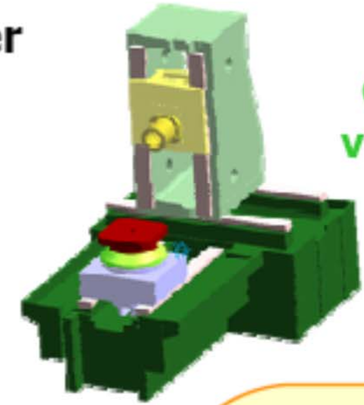
Algoritam MKE - primer

Example: Vertical machining center

Elastic deformation

Thermal behavior

etc.



Geometry is very complex!

Governing Equation: $L(\phi) + f = 0$

Boundary Conditions: $B(\phi) + g = 0$

FEM

Approximate!

A set of simultaneous algebraic equations

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$

You know all the equations, but you cannot solve it by hand

Algoritam MKE-primer

$$\underbrace{[\mathbf{K}]}_{\text{Property}}\underbrace{\{\mathbf{u}\}}_{\text{Behavior}} = \underbrace{\{\mathbf{F}\}}_{\text{Action}} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{F}\}$$

Unknown

	Property $[\mathbf{K}]$	Behavior $\{\mathbf{u}\}$	Action $\{\mathbf{F}\}$
Elastic	stiffness	displacement	force
Thermal	conductivity	temperature	heat source
Fluid	viscosity	velocity	body force
Electrostatic	dialectri permittivity	electric potential	charge

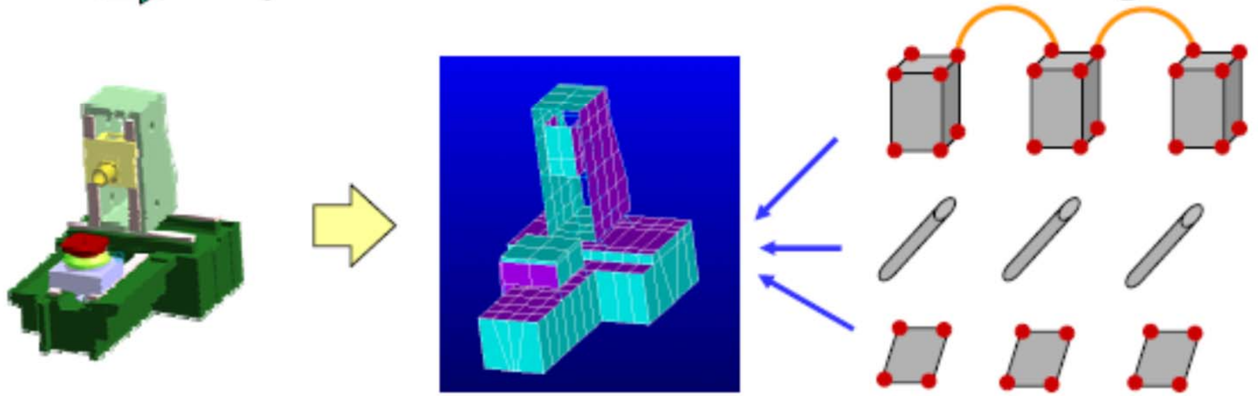
Algoritam MKE-primer

It is very difficult to make the algebraic equations for the entire domain

➡ Divide the domain into a number of small, simple elements

➡ A field quantity is interpolated by a polynomial over an element

➡ Adjacent elements share the DOF at connecting nodes

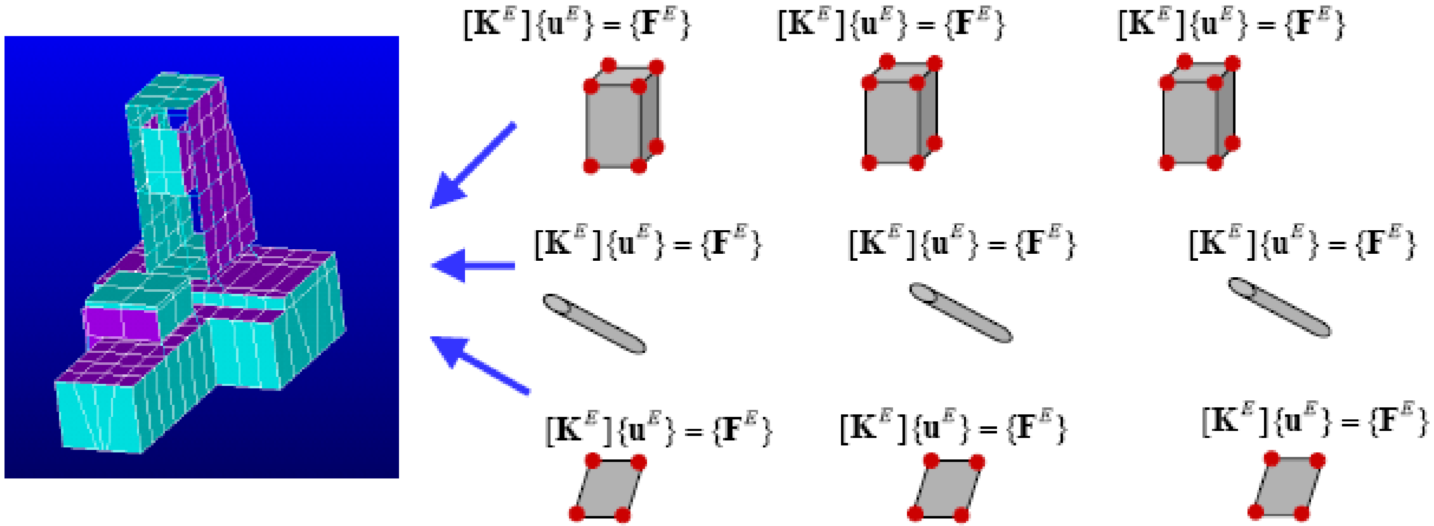


Finite element: Small piece of structure

Algoritam MKE-primer

Obtain the algebraic equations for each element (this is easy!)

Put all the element equations together

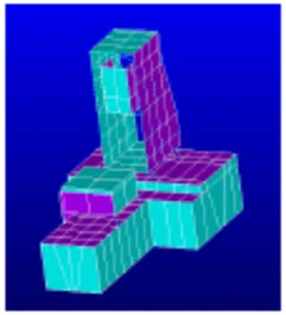


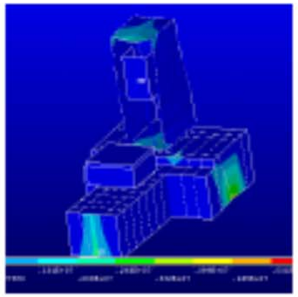
$$[K]\{u\} = \{F\}$$

Algoritam MKE-primer

Solve the equations, obtaining unknown variabless at nodes.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{F}\}$$





Variaciona metoda

- Zasniva na principu o stacionarnosti funkcionala Π

  (U problemima mehanike čvrstog tela funkcional je obično potencijalna odnosno komplementarna energija sistema ili se funkcional formuliše na osnovu ove dvije energije)

- Izvedena je iz klasične metode *Ritz*-a
- Red izvoda u funkionalu je niži od izvoda diferencijalnih jednačina razmatranog problema
- Uspešno se primjenjuje kako na elemente jednostavnog tako i elemente složenog oblika.
- Najviše zastupljena metoda

Variaciona metoda-nastavak

- Osnovni variacioni principu u mehanici čvrstog tela:
  - Princip o minimumu potencijalne energije
  - Princip o minimumu komplementarne energije
  - Reissne-or varijacioni princip

Varijaciona metoda – Princip virualnog rada

- Virtualna pomeranja (δ)- beskonačno mala pomeranja koja su neprekidne i diferencijabilne funkcije koordinata tačaka tela i koja su jednaka nuli u svim onim tačkama konture u kojima su zatati konturni uslovi po pomeranjim.
- Rad spoljašnjih sila $$V = \int_{v} F^{T} \cdot u \cdot dv + \int_{s} p^{T} \cdot u \cdot ds$$
- Rad unutrašnjih sila-potencijalna energija $$U = \frac{1}{2} \int_{v} \sigma^{T} \cdot \varepsilon \cdot dv$$
- Totalna energija – POTENCIJAL Lagrange-a $$\Pi = U + V$$

$$\Pi = \int_{v} \frac{1}{2} \varepsilon^{T} D \varepsilon dv - \int_{v} F^{T} u dv - \int_{S_{\sigma}} p^{T} u ds$$

- Princip minimuma rada $$\boxed{\delta\Pi = \delta U + \delta V = 0}$$

Varijaciona metoda – Matrica krutosti

Metoda konačnih elemenata često umjesto jednadžbi stanja ravnoteže primijenjuje princip virtualnih pomaka ili princip virtualnog rada. Ovaj princip se temelji na jednakosti virtualnog rada vanjskih i virtualnog rada unutrašnjih sila:

$$\delta W = \delta U \tag{6.40}$$

ili

$$\delta (W - U) = 0 . \tag{6.41}$$

Rada vanjskih sila (virtualni rad vanjskih sila na konturi tijela):

$$\delta W = \int_{A_p} \left(p_{n1} \delta q_1 + p_{n2} \delta q_2 + \ldots + p_{nk} \delta q_k \right) dA . \tag{6.42}$$

Potencijalna energija deformiranja (virtualni rad unutrašnjih sila):

$$\delta U = \int_V \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx} \right) dV . \tag{6.43}$$

Varijaciona metoda – Matrica krutosti

$$dW = \{\delta q\}^T \{F\} \tag{6.44}$$

ili prema (6.43) potencijalna energija deformiranja:

$$\delta U = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \, . \tag{6.45}$$

Koristeći izraz (6.40) i izraze (6.44) i (6.45), te izraze (6.35) i (6.39), može se pisati:

$$\int_V ([B]\{\delta q\})^T \left([E][B]\{q\} + \{\sigma^t\} \right) dV = \{\delta q\}^T \{F\}$$

ili

$$\int_V [B]^T [E][B]\, dV \{q\} + \int_V \left\{ [B]^T \{\sigma^t\} \right\} dV = \{F\}. \tag{6.46}$$

Varijaciona metoda – Matrica krutosti

U izrazu (6.46) matrica krutosti konačnog elementa ima oblik:

$$[k]=\int_V [B]^T [E]\ [B]\, dV \tag{6.47}$$

ili

$$[k]=[B]^T [E] [B]\, V\ , \tag{6.48}$$

gdje je: volumen

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}\ , \tag{6.49}$$

$[B]^T$ - transponirani oblik matrice $[B]$.

Vektor sila u čvorovima konačnog elementa uslijed toplinske deformacije:

$$\{F^t\}=\int_V\ [B]^T\ \{\sigma^t\} dV\ . \tag{6.50}$$

Bez utjecaja temperature i toplinskih deformacija dobiva se osnovna jednadžba veze sile u čvorovima $\{F\}$ i pomaka u čvorovima konačnog elementa $\{q\}$, tako da je vektor sila u čvorovima konačnog elementa za slučaj statičkog opterećenja:

$$\{F\}=[k]\ \{q\} \tag{6.51}$$

ili vektor pomaka u čvorovima konačnog elementa:

$$\{q\}=[k]^{-1}\{F\}. \tag{6.52}$$

Varijaciona metoda – Matrica krutosti

Integriranje se zamjenjuje sumiranjem diskretnih vrijednosti, tako se matrica krutosti može prikazati preko podmatrica, tj. za $r = i, j, m, n,$ i za $s = i, j, m, n$:

$$[k]=\begin{Vmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} & k_{iK} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} & k_{jK} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} & k_{kK} \\ k_{Ki} & k_{Kj} & k_{Kk} & k_{KK} \end{Vmatrix}, \tag{6.53}$$

gdje je $[k_{rs}]=[B_r]^T[D][B_S]V$.

Jednadžba (6.51) može se za konačni element prikazati s komponentama u pojedinim čvorovima i, j, k, K:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \\ F_K \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} & k_{iK} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} & k_{jK} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} & k_{kK} \\ k_{Ki} & k_{Kj} & k_{Kk} & k_{KK} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \\ q_k \end{Bmatrix} \tag{6.54}$$

Ako je struktura raščlanjena na n konačih elemenata, ukupna matrica krutosti je

$$[K]=\sum_{(n)}[k_{rs}]_{(k)}, \qquad k=1,n\ . \tag{6.55}$$

Matrica krutosti $[K]$ odredi se poznavanjem:

- geometrijskih i fizikalnih karakteristika pojedinih konačnih elemenata,
- vanjskog opterećenja i
- načina oslanjanja sistema.

Varijaciona metoda – Matrica krutosti

Sumiranje se provodi po dijagramu matrice, tako da je za konačni element sa dva čvora i strukturu od tri elementa:

$$[K]=\begin{Vmatrix} k_{11(1)} & k_{12(1)} & 0 & 0 \\ k_{21(1)} & k_{22(1)}+k_{22(2)} & k_{23(1)} & 0 \\ 0 & k_{32(2)} & k_{33(2)}+k_{33(3)} & k_{34(3)} \\ 0 & 0 & k_{43(3)} & k_{44(3)} \end{Vmatrix} \qquad (6.56)$$

Za višečvorne elemente i za složenu strukturu, matrica krutosti postaje složena i velika. Simetrična je i pojasnog oblika. Širina pojasa ovisi od složenosti strukture, načina podjele, broja konačnih elemenata, te načina podjele i numeriranja čvorova i elemenata:

$$[K]=\begin{Vmatrix} \times & \times & \times & & & & \\ \times & \times & \times & \times & & 0 & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \\ & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & 0 & & \times & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times & \times \end{Vmatrix} . \qquad (6.57)$$

Prikazani način formiranja matričnih jednadžbi dat je s ciljem da se pokaže metodologija postupka. Kod gotovih programa za MKE, veliki broj prikazanih operacija je automatiziran. Način korištenja programa je različit. Najvažniji su ulazni parametri opterećenja i ograničenja.

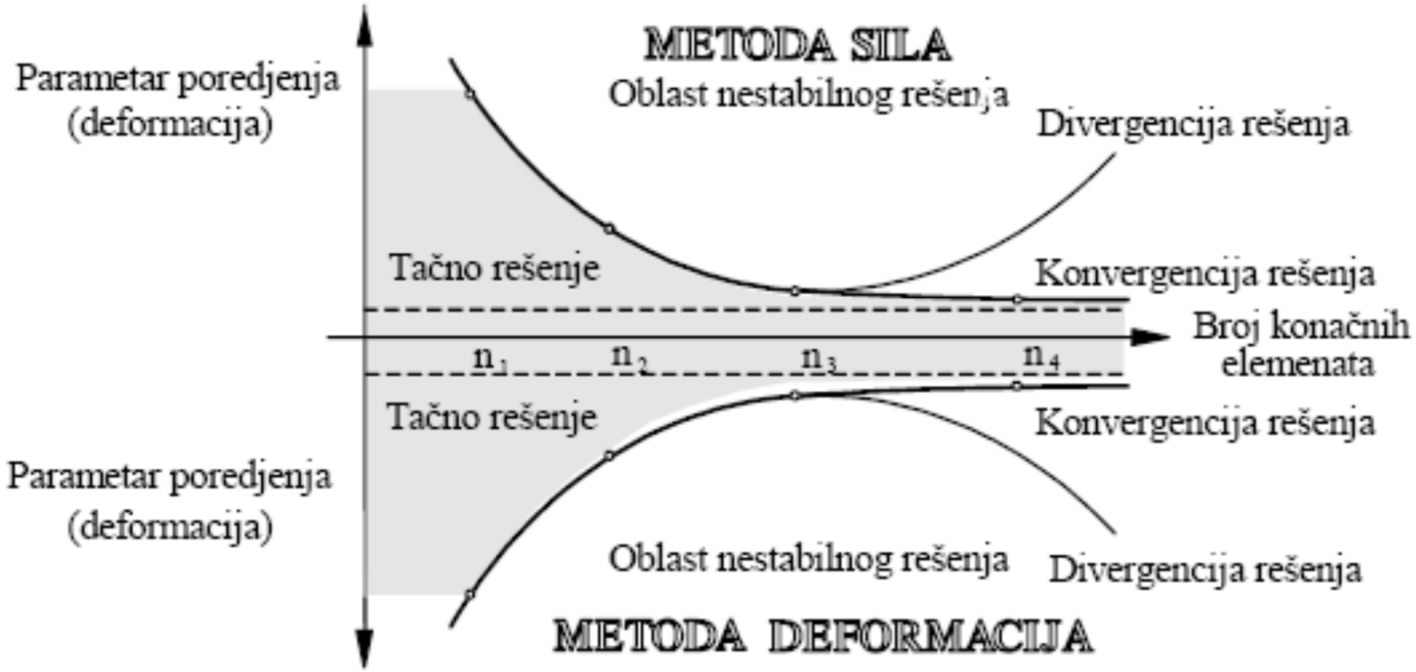
Metoda reziduuma

- Opšti vid aproksimacije po MKE
- Zasniva se na diferencijalnim jednačina razmatranog problema.
- Primenjuje se kod problema kod kojih je teško formulisati funkcional i onih problema kod kojih funkcional uopšte ne egzistira

Metoda energetskog balansa

- Zasniva se na balansu različitih vidova energije
- Primenjuje se termostatičkoj i termodinamičkoj analizi kontinuuma.

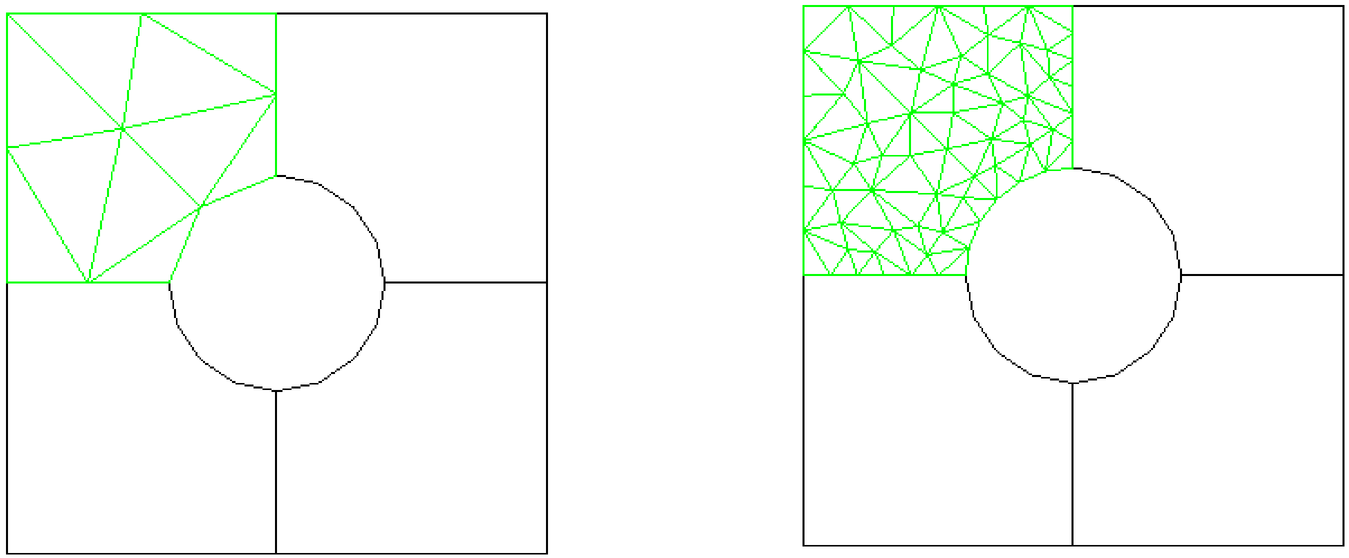
Konvergencija rešenja



IZVORI GREŠAKA U MKE

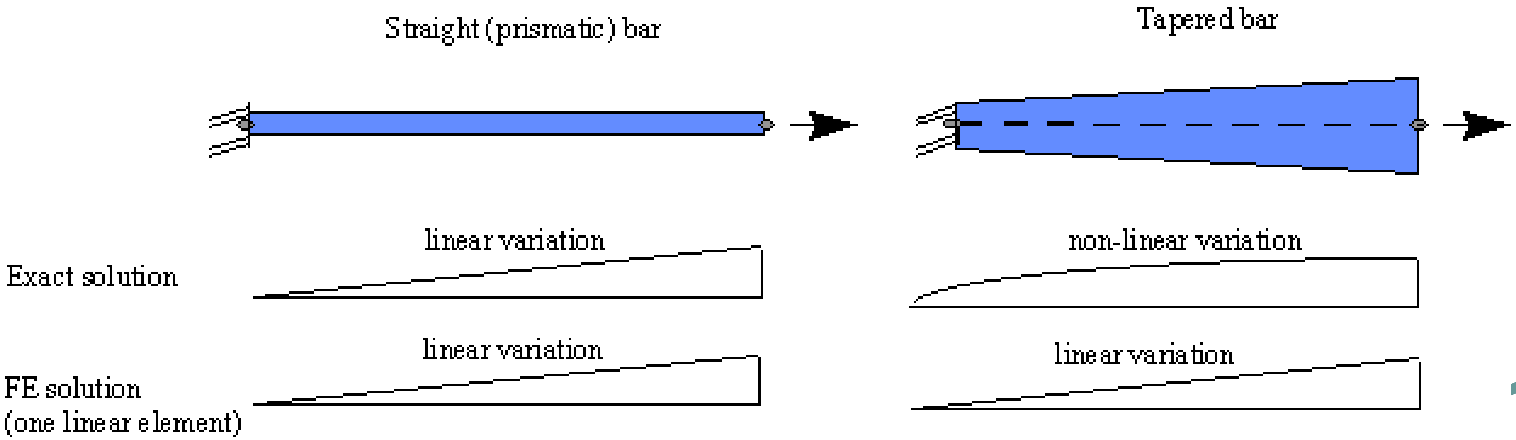
- **The three main sources of error in a typical FEM solution are <u>discretization</u> errors, <u>formulation</u> errors and <u>numerical</u> errors.**

- **Discretization error results from transforming the physical system (continuum) into a finite element model, and can be related to modeling the boundary shape, the boundary conditions, etc.**



IZVORI GREŠAKA U MKE - Nastavak

- **Formulation error** results from the use of elements that don't precisely describe the behavior of the physical problem.
- Elements which are used to model physical problems for which they are not suited are sometimes referred to as ill-conditioned or mathematically unsuitable elements.
- For example a particular finite element might be formulated on the assumption that displacements vary in a linear manner over the domain. Such an element will produce no formulation error when it is used to model a linearly varying physical problem (linear varying displacement field in this example), but would create a significant formulation error if it used to represent a quadratic or cubic varying displacement field.

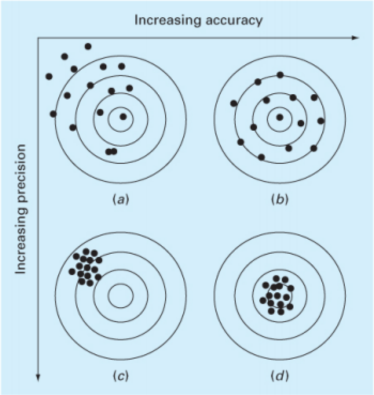


IZVORI GREŠAKA U MKE-Nastavak

- **Numerical error** occurs as a result of numerical calculation procedures, and includes truncation errors and round off errors.
- Numerical error is therefore a problem mainly concerning the FEM vendors and developers.
- The user can also contribute to the numerical accuracy, for example, by specifying a physical quantity, say Young's modulus, E, to an inadequate number of decimal places.

- ***Accuracy*** refers to how closely a computed or measured value agrees with the true value, while ***precision*** refers to how closely individual computed or measured values agree with each other

a) inaccurate and imprecise
b) accurate and imprecise
c) inaccurate and precise
d) accurate and precise



IZVORI GREŠAKA U MKE-Nastavak

Truncation errors are those that result from using an approximation in place of an exact mathematical procedure

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

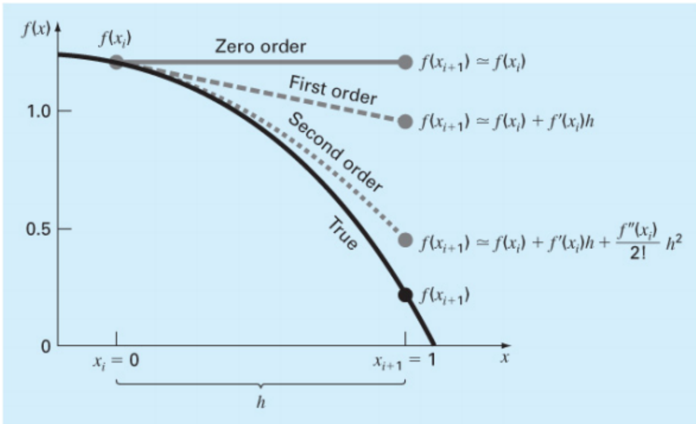


FIGURE 4.7
The approximation of $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ at $x = 1$ by zero-order, first-order, and second-order Taylor series expansions.

IZVORI GREŠAKA U MKE - Nastavak

Roundoff errors arise because digital computers cannot represent some quantities exactly. There are two major facets of roundoff errors involved in numerical calculations:

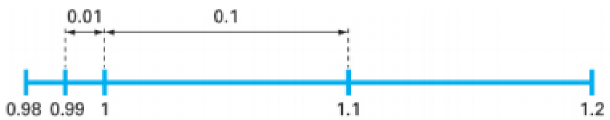
– Digital computers have size and precision limits on their ability to represent numbers

– Certain numerical manipulations are highly sensitive to roundoff errors

– If 0.03125 is represented by the system as 3.1×10^{-2} , a roundoff error is introduced

$$\frac{0.03125-0.031}{0.03125}=0.008$$

– The roundoff error of a number will be proportional to its magnitude



IZVORI GREŠAKA U MKE - Nastavak

- Roundoff error can happen in several circumstances other than just storing numbers - for example:
  - ***Large computations*** - if a process performs a large number of computations, roundoff errors may build up to become significant

```
function sout = sumdemo()
s = 0;
for i = 1 : 10000
   s = s + 0.0001;
% notice that 0.0001 cannot be expressed exactly in base - 2.
end
sout = s;
```

```
function sout = sumdemo()
s = 0;
for i = 1 : 10000
   s = s + 0.0001;
>> format long
>> sumdemo
ans =
    0.99999999999991
```

  - ***Adding a Large and a Small Number*** - Since the small number's mantissa is shifted to the right to be the same scale as the large number, digits are lost

What if $0.0010 + 4000$ is represented with 4 - digit mantissa and 1 - digit exponent?

$$\begin{array}{ll} 4.000 & \times 10^3 \\ \underline{0.000001} & \underline{\times 10^3} \\ \underline{4.000}001 & \times 10^3 \quad (\text{chopped to } 4.000 \times 10^3) \end{array}$$

  - ***Smearing*** - Smearing occurs whenever the individual terms in a summation are larger than the summation itself
    - $(x + 10^{-20}) - x = 10^{-20}$ mathematically, but $x = 1$; $(x + 10^{-20}) - x$ gives a 0 in MATLAB!

Prednosti MKE

- Can readily handle complex geometry:
  - The heart and power of the FEM.
- Can handle complex analysis types:
  - Vibration
  - Transients
  - Nonlinear
  - Heat transfer
  - Fluids
- Can handle complex loading:
  - Node-based loading (point loads).
  - Element-based loading (pressure, thermal, inertial forces).
  - Time or frequency dependent loading.
- Can handle complex restraints:
  - Indeterminate structures can be analyzed.

Prednosti MKE-nastavak

- Can handle bodies comprised of nonhomogeneous materials:
  - Every element in the model could be assigned a different set of material properties.
- Can handle bodies comprised of nonisotropic materials:
  - Orthotropic
  - Anisotropic
- Special material effects are handled:
  - Temperature dependent properties.
  - Plasticity
  - Creep
  - Swelling
- Special geometric effects can be modeled:
  - Large displacements.
  - Large rotations.
  - Contact (gap) condition.

Nedostatci MKE

- **A specific numerical result is obtained for a specific problem. A general closed-form solution, which would permit one to examine system response to changes in various parameters, is not produced.**
- **The FEM is applied to an *approximation* of the mathematical model of a system (the source of so-called inherited errors.)**
- **Experience and judgment are needed in order to construct a good finite element model.**
- **A powerful computer and reliable FEM software are essential.**
- **Input and output data may be large and tedious to prepare and interpret.**

Nedostatci MKE-nastavak

- **Numerical problems:**
  - **Computers only carry a finite number of significant digits.**
  - **Round off and error accumulation.**
  - **Can help the situation by not attaching stiff (small) elements to flexible (large) elements.**
- **Susceptible to user-introduced modeling errors:**
  - **Poor choice of element types.**
  - **Distorted elements.**
  - **Geometry not adequately modeled.**
- **Certain effects not automatically included:**
  - **Buckling**
  - **Large deflections and rotations.**
  - **Material nonlinearities .**
  - **Other nonlinearities.**